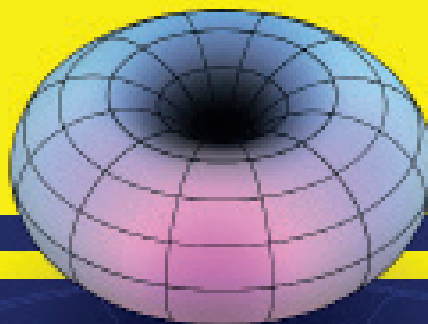
Lições de Matemática

Christian Q. Pinedo

Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}$

Christian José Quintana Pinedo

CÁLCULO DIFERENCIAL EM $\mathbb{R}$

A meus filhos: *Milagros, André, Nykolas, Kevyn,*
e Cecília, pelas eternas lições de vida.

SUMÁRIO

Identidades algébricas

Considerar $a,\ b \in \mathbb{R}$ e $m,\ n \in \mathbb{Z}$, en geral tem-se:

- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, \quad a > 0$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \quad a > 0,\ b > 0$
- $(ab)^m = a^m b^m$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \quad a > 0$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}, \qquad b \neq 0$
- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad a > 0,\ b > 0$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}, \qquad a \neq 0$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
- $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ quando n-ímpar

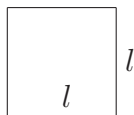
Identidades trigonométricas

Considerar $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

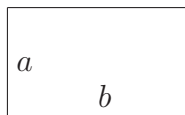
- $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\alpha$
- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
- $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\text{sen}\alpha \cdot \csc\alpha = 1$
- $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$
- $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$
- $\cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha$
- $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$
- $\text{sen}^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
- $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
- $\text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$
- $\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta + \text{sen}\beta\cos\alpha$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\text{sen}\beta$
- $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$
- $\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$
- $2\text{sen}\alpha\text{sen}\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$
- $\tan\alpha = \dfrac{1 - cos2\alpha}{\text{sen}2\alpha} = \dfrac{\text{sen}2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$
- $2\text{sen}\alpha\cos\beta = \text{sen}(\alpha+\beta) + \text{sen}(\alpha-\beta)$
- $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$

Identidades geométricas

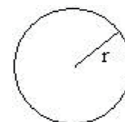
1. A=área, P = perímetro, l= lado, r = raio

Quadrado

$A = l^2$

$P = 4l$

Retângulo

$A = b \times a$

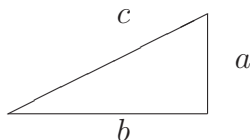
$P = 2(a + b)$

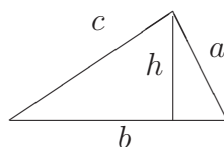
Círculo

$A = \pi r^2$

$P = 2\pi r$

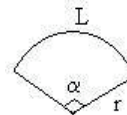
. . . .

2. A=área, P = perímetro, c= hipotenusa, a e b = catetos, h = altura, r = raio,
α = ângulo central, L = comprimento do setor circular

Teorema de Pitágoras

$c^2 = a^2 + b^2$

Triângulo

$A = \frac{1}{2} b \times h$

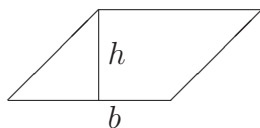
$P = a + b + c$

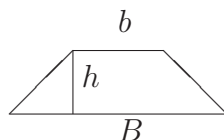
Setor circular

$A = \frac{1}{2} r^2 \alpha$

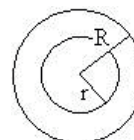
$P = \alpha r$

. . . .

3. A=área, P = perímetro, B= base maior, b = base menor, h = altura,
R = raio maior, r = raio menor,

Paralelogramo

$A = b \times h$

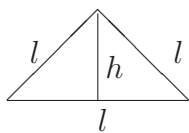
Trapezóide

$A = \frac{1}{2}(B + b)h$

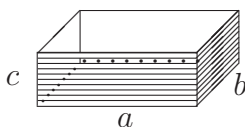
Coroa circular

$A = \pi(R^2 - r^2)h$

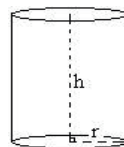
$P = 2\pi(R + r)$

. . . .

4. A=área, P = perímetro, S= superfície total, V = volume, h = altura, r = raio

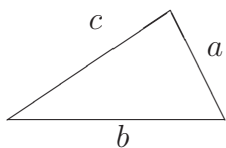
Triângulo Equilátero

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$

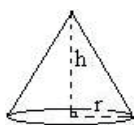
Paralelepipedo reto

$$V = a \times b \times c$$
$$S = 2(a+b)c + 2ab$$

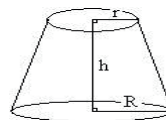
Cilindro

$$V = \pi r^2 h$$
$$S = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

. . . .

5. V = volume, h = altura, r = raio, S = superfície

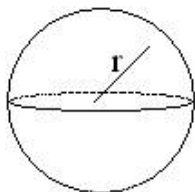
Triângulo

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

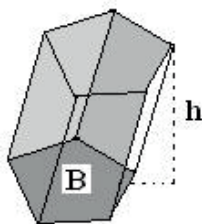
Cone circular reto

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

Tronco de cone

$$V = \frac{1}{3}\pi (R^2 + rR + r^2) h$$

. . . .

6. V = volume, h = altura, r = raio, S = superfície

Esfera

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$S = 4\pi r^2$$

Prisma

$$V = B \times h$$

B = área da base

Identidades para derivadas

Sejam C= constante, $n \in \mathbb{Q}$, $a \in \mathbb{R}$, $f(x)$, $g(x)$ = funções, α=ângulo, Lnx=logaritmo neperiano, $\log_b x$ = logaritmo natural na base b.

- $D_x C = 0$
- $D_x(f+g) = D_x f + D_x g$
- $D_x(f \cdot g) = f \cdot D_x g + g \cdot D_x f$
- $D_x(\frac{f}{g}) = \dfrac{g \cdot D_x f - f \cdot D_x g}{g^2}$
- $D_x f(g(x)) = D_x f(g(x)) \cdot D_x g$
- $D_x[f]^n = n \cdot D_x[f]^{n-1}$
- $D_x[e^{f(x)}] = e^{f(x)} \cdot D_x[f(x)]$
- $D_x a^f = a^f \cdot D_x f \cdot \text{Ln}a, \quad a > 0$
- $D_x(\text{Ln}f) = \dfrac{1}{f} \cdot D_x f, \quad f \neq 0$
- $D_x(\log_b f) = \dfrac{1}{f \cdot \text{Ln}b} \cdot D_x f, \quad f \neq 0$
- $D_x \text{sen} x = \cos x$
- $D_x \tan x = \sec^2 x$
- $D_x \cos x = -\text{sen} x$
- $D_x \cot x = -\csc^2 x$
- $D_x \sec x = \sec x \tan x$
- $D_x \csc x = -\csc x \cot x$
- $D_x \text{arcsen} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $D_x \arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $D_x \arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $D_x \text{arcsec} x = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Identidades diversas

- Suponhamos $b,\ c \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{Q}$ tem-se: $\log_b a = N \quad \Leftrightarrow \quad a = b^N$. Logo: (**i**) $\log_b(a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$, (**ii**) $\log_b(a/c) = \log_b a - \log_b c$, (**iii**) $\log_b a^m = m \log_b a$, (**iv**) $\log_c a = \log_b a \cdot \log_c b$
- Para números na base decimal: $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10 a_1 + a_0$
- Equivalência entre graus sexagesimais e radianos.

α **graus**	α **radianos**	senα	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$
0^o	0	0	1	0	$-$	1	$-$
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45^o	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60^o	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
90^o	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$-$	0	$-$	1

x

Formas determinadas e Formas indeterminadas (?)

	$\lim_{x\to} f(x) =$	$\lim_{x\to} g(x) =$	$h(x) =$	$\lim_{x\to} h(x) =$	de modo simbólico
1	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$f(x)+g(x)$	$\pm\infty$	$\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$
2	$+\infty$	$+\infty$	$f(x)-g(x)$	?	$(+\infty)-(+\infty) =$?
3	$+\infty$	$K \in \mathbb{R}$	$f(x)+g(x)$	$+\infty$	$+\infty + K = +\infty$
4	$-\infty$	$K \in \mathbb{R}$	$f(x)+g(x)$	$-\infty$	$-\infty + K = -\infty$
5	$+\infty$	$+\infty$	$f(x)\cdot g(x)$	$+\infty$	$(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$
6	$+\infty$	$-\infty$	$f(x)\cdot g(x)$	$-\infty$	$(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$
7	$+\infty$	$K > 0$	$f(x)\cdot g(x)$	$+\infty$	$(+\infty)\cdot K = +\infty$
8	$+\infty$	$K < 0$	$f(x)\cdot g(x)$	$-\infty$	$(+\infty)\cdot K = -\infty$
9	$\pm\infty$	0	$f(x)\cdot g(x)$	?	$\pm\infty \cdot 0 =$?
10	K	$\pm\infty$	$f(x)/g(x)$	0	$K/\pm\infty = 0$
11	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$f(x)/g(x)$	?	$\pm\infty/\pm\infty =$?
12	$K > 0$	0^+	$f(x)/g(x)$	$+\infty$	$K/0^+ = +\infty$
13	$+\infty$	0^+	$f(x)/g(x)$	$+\infty$	$+\infty/0^+ = +\infty$
14	$K > 0$	0^-	$f(x)/g(x)$	$-\infty$	$K/0^+ = -\infty$
15	$+\infty$	0^-	$f(x)/g(x)$	$-\infty$	$+\infty/0^- = -\infty$
16	0	0	$f(x)/g(x)$	?	$0/0 =$?
17	0	0	$[f(x)]^{g(x)}$	?	$0^0 =$?
18	∞	∞	$[f(x)]^{g(x)}$	?	$\infty^\infty =$?
19	0	∞	$[f(x)]^{g(x)}$	?	$0^\infty =$?
20	∞	0	$[f(x)]^{g(x)}$	?	$\infty^0 =$?
21	1	∞	$[f(x)]^{g(x)}$	?	$1^\infty =$?

Seja $K \in \mathbb{R}$, não existem em $\mathbb{R}$: $\frac{K}{0}$, 0^0, $\frac{K}{\infty}$.

No limite: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \pm\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\to 0} x^x = 1$

NOTAÇÕES

		Seção
$\cdots$	significa: *continuar sucesivamente*	1.2
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais	1.2
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros	1.2
$\mathbb{Q}$	conjunto dos números racionais	1.2
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais	1.2
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos	1.2
$\cup$	união de conjuntos	1.2
$\approx$	significa: *aproximadamente*	1.2
$\cap$	interseção de conjuntos	1.2
$\emptyset$	conjunto vazio	1.2
$<$	relação estritamente menor que ...	1.2
$>$	relação estritamente maior que ...	1.2
$\neq$	não é igual a. . .	1.2.1
$\forall$	quantificador universal (para todo)	1.2.1
$\exists$	quantificador existencial (existe)	1.2.1
$/.$	tais que. . .	1.2.1
$\Rightarrow$	implica (então)	1.2.1
$\leq$	relação menor ou igual a...	1.2.1
$\overline{abc}$	número formado por três algarismos	1.2
$\geq$	relação maior ou igual a...	1.6
$[\|x\|]$	parte inteira de um número real x	1.8
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	soma: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$	1.8
$n!$	significa o produto: $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$	1.8
$\Leftrightarrow$	bicondicional (se, e somente se)	1.4.3
$\subset$	inclusão própria de conjuntos	1.6
$m \mid n$	m é divisor de n	1.8.1
$m \nmid n$	m não é divisor de n	1.8.1
$\binom{n}{k}$	significa: $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	1.8.3
$\subseteq$	inclusão de conjuntos	2.1
$A \times B$	produto cartesiano dos conjuntos A com B	2.1

PREFÁCIO

O propósito de uma primeira disciplina de *Cálculo Diferencial* é ensinar ao estudante as noções básicas da derivada assim como as técnicas e aplicações elementares que acompanham tais conceitos.

Esta obra representa o esforço de síntese na seleção de um conjunto de problemas que se apresenta com frequência, quando um estudante da graduação começa a estudar cálculo no início do seus estudos. O objetivo deste livro é introduzir os principais conceitos do cálculo diferencial de uma variável e suas aplicações começando com uma revisão da matemática básica, assim como orientar a metodologia para que o leitor possa identificar e construir um modelo matemático e logo resolvê-lo.

Cada capítulo se inicia com os objetivos que se pretende alcançar; a farta variedade dos exemplos e exercícios apresentados estão classificados de menor a maior dificuldade.

A variedade dos problemas e exercícios propostos pretende transmitir parte de minha experiência profissional durante muitos anos de exercício como professor de ensino superior assim, como Consultor em Matemática Pura e Aplicada, com atuação na graduação e pós-graduação da docência universitária.

Fico profundamente grato com os estudantes dos diversos cursos onde difundi as ideias e o conteúdo das notas deste trabalho. Também agradeço as contribuições e sugestões dos leitores, em particular dos meus colegas, pela sua constante dedicação para a revisão e discussão dos problemas propostos.

Atualmente está em construção o livro "*Suplemento de Cálculo I*", onde se encontra a solução de todos os exercícios propostos neste livro e pode ser obtido solicitando uma cópia ao autor em: christianjqp@yahoo.com.br .

Christian Quintana Pinedo.

Palmas - TO, Agosto de 2016

"*A matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens*".

R. Descartes (1596 – 1650)

"*Não adianta ter um mar de conhecimentos, com a profundeza de um milímetro.*"

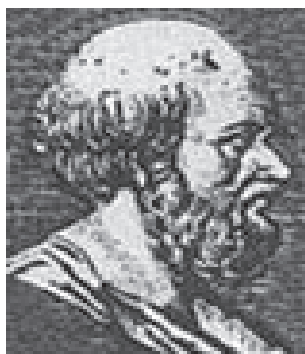
Ch. Q. Pinedo (1954–)

"*Professores tendem à eternidade; nunca poderão saber onde termina sua influencia.*"

Henry Adams[1] (1838 – 1918)

[1]Henry Brooks Adams (1838 – 1918), foi um estadunidense historiador, jornalista e novelista.

Capítulo 1

SISTEMA DOS NÚMEROS REAIS

Eratóstenes

Eratóstenes *nasceu em Cirene* (276 *a.C.* – 197 *a.C.*), *o que hoje é a Líbia. Depois de estudar em Alexandria e Atenas, ele se tornou diretor da famosa Biblioteca de Alexandria.*

Ele trabalhou com geometria e números primos. Eratóstenes é mais conhecido pelo seu crivo de números primos (o "Crivo de Eratóstenes"), o qual, com algumas modificações, ainda é um instrumento importante de pesquisa na Teoria dos Números.

Eratóstenes também fez uma medição extremamente precisa da circunferência da Terra, comparando as sombras produzidas pelo Sol do meio-dia, no verão, em Siena e Alexandria. Ele calculou a circunferência da Terra em 250.000 *estádios*[1], *a distância até o Sol em* 804.000.000 *estádios e a distância da Terra à Lua em* 780.000 *estádios* .

Eratóstenes também mediu a inclinação do eixo da Terra com grande precisão, encontrando o valor de 23 *graus,* $51'15''$. *Também organizou um catálogo astronômico, contendo* 675 *estrelas.*

Eratóstenes ficou cego em idade avançada e diz-se que teria cometido suicídio, recusando-se a comer e consequentemente morrendo de inanição.

A palavra "crivo" significa peneira. O que Eratóstenes imaginou foi uma "peneira" capaz de separar os números primos dos compostos. A ideia do Eratóstenes foi a seguinte: já que um número primo p *é aquele que somente possui dois divisores inteiros - o* 1 *e o próprio* p *- poderia haver uma peneira que pudesse separar estes números (que só têm dois divisores, e portanto são primos) dos outros, que possuem mais de dois divisores (e são chamados de "compostos").*

1.1 Introdução

A matemática a ser estudada nos primeiros cursos da graduação está inspirada em duas fontes:

- **A primeira** é a "*lógica matemática*"; ela se desenvolve por meio de proposições (frases), às quais podemos atribuir um valor lógico de verdade ou de falsidade (somente

[1]Estádio era uma unidade de medida na Grecia, equivalente a aproximadamente 180m de comprimento.

um destes valores). Por exemplo:

- A terra tem a forma arredondada (**v** = verdade).
- A terra é de forma quadrada (**f** = falso)

Na lógica matemática, a negação de uma proposição não implica na afirmação do contrário.

- **A segunda** é o *"cálculo"*; isto será objeto de nosso estudo.

O estudo fundamental do cálculo está orientado sob conceitos de diferenciação, integração e suas aplicações em diversos campos do conhecimento matemático. Por exemplo:

- Um fabricante de caixas de papelão deseja produzir caixas sem tampa, usando pedaços quadrados de papelão com $40\,cm$ de lado, cortando quadrados iguais nos quatro cantos e virando verticalmente (para cima) os quatro lados. Achar o comprimento dos lados dos quadrados a serem cortados a fim do obter uma caixa com o maior volume possível.

- Um distribuidor atacadista tem um pedido de 30.000 caixas de leite que chegam a cada 5 semanas. As caixas são despachadas pelo distribuidor a uma razão constante de 1.800 caixas por semana. Se a armazenagem numa semana custa R$ $0,05$ por caixa . Qual é o custo total de manutenção do estoque durante 10 semanas ?

- Suponhamos que um tumor no corpo de um porco tenha forma esférica. Quando o raio do tumor é de $0,5\ cm$, a taxa de crescimento do raio é de $0,0001\ cm$ por dia. Qual é a taxa de crescimento do volume do tumor em algum instante t_0 ?

Os problemas do exemplo acima podem ser resolvidos com técnicas e operações com números reais.

Para compreender bem as operações fundamentais do cálculo, estudaremos algumas propriedades dos números reais, bem como as operações permitidas com os mesmos.

1.2 Sistema dos números reais

Um numeral é um símbolo ou grupo de símbolos que representou um número em um determinado instante da evolução do homem. Em alguma determinada escrita ou época, os numerais diferenciaram-se dos números, do mesmo modo que as palavras se diferenciaram das coisas às que se referem. Os símbolos "12", "doze" e "XII" (doze em Latim) são numerais diferentes representativos do mesmo número, apenas escrito em idiomas e épocas diferentes.

Os números representam papel vital não só na matemática, como na ciência de um modo geral, e na nossa vida diária. Vivemos cercados de números, horários, tabelas, gráficos, preços, juros, impostos, velocidades, distâncias, temperaturas, resultados de jogos, etc.

A maior parte das quantidades estudadas nestas notas (áreas, volumes, taxas de variação, velocidades, ...) são medidas por meio de números reais e nesse sentido podemos dizer que nosso "Cálculo Diferencial" será trabalhado no sistema dos números reais.

O estudo do sistema dos números reais pelo método axiomático, consiste em definir este "*sistema numérico*" mediante um grupo de axiomas, de modo que qualquer conjunto de números: naturais, inteiros, racionais e irracionais sejam formados por subconjuntos próprios do conjunto de números reais $\mathbb{R}$.

Ha outro modo de se estudar os números reais; podemos defini-los em termos de números racionais, usando os clássicos cortes de Dedekind [2] ou as sucessões de Cauchy[3]. Porém, para o nosso estudo do - *"Cálculo Diferencial em* $\mathbb{R}$" - é suficiente introduzir o sistema pelo método axiomático.

Consideremos os seguintes conjuntos numéricos:

$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ n\ \cdots,\ \}$ naturais.

$\mathbb{Z} = \{\ \cdots,-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}$ inteiros.

$\mathbb{Q} = \{\ \frac{a}{b}\ /.\quad a,\ b \in \mathbb{Z},\quad b \neq 0\}$ racionais.

$\mathbb{Q} = \{\ \cdots,-2,\ \cdots-\frac{3}{2},\ \cdots,-1,\ 0,\ 1,\ \frac{5}{2},\ 3,\frac{11}{4},\ \cdots\}$ racionais.

$\mathbb{I} = \{\pm\sqrt{2},\ \pm\pi,\ \pm e,\ \pm\sqrt[3]{7},\ \sqrt{5},\ \cdots\}$ irracionais.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \bigcup \mathbb{I}$ reais.

$\mathbb{C} = \{a + bi;\quad a, b \in \mathbb{R}\quad \text{onde}\quad i = \sqrt{-1}\ \}$ complexos

$\mathbb{C} = \{1 + 2i,\ 3 + 2i,\ 5 - 4i,\ -1 - i,\ i,\ 2,\ 8i,\ 7,\ \cdots\}$ complexos

Qualquer número real pode ser considerado como um número racional ou número irracional. Estes números racionais consistem dos seguintes:

a) Os inteiros positivos, negativos e o zero:

$\cdots-6,\ -5,\ -4,\ \cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 12,\ 13,\ 14,\ \cdots.$

b) As frações positivas e negativas:

---

[2]Richard Dedekind (1831 – 1916) foi aluno de Carl F. Gauss (1777 – 1855) e Dirichlet (1805 – 1859). Estudou o problema dos números irracionais, e é mais conhecido pelo seu trabalho nos fundamentos do sistema de números reais.

[3]Augustin Cauchy (1789 – 1857) foi o fundador da análise moderna, aportou importantes resultados em outras áreas da matemática. Além de suas atividades políticas e religiosas, escreveu 759 trabalhos em matemática.

$$\cdots -\frac{8}{5}, \cdots -\frac{1}{2}, \cdots, \frac{96}{15} \cdots, \frac{8}{5}, \frac{13}{14}, \cdots.$$

c) Os números decimais limitados (positivos e negativos):

$$5,37 = \frac{537}{100}, \qquad -3,2841 = -\frac{32.841}{10.000}, \qquad 0,528 = \frac{528}{1.000}$$

d) Os números decimais ilimitados (positivos e negativos):

$$0,333333\cdots \approx \frac{3}{9}, \qquad -3,745745745\cdots \approx -3-\frac{745}{999} \quad 2,5858585858\cdots \approx 2+\frac{58}{99}, \qquad 8,9999999\cdots \approx 8+\frac{9}{9}$$

O símbolo $\approx$ significa *aproximadamente*. Observe:

Se consideremos a relação $0,999999\cdots = \frac{9}{9} = 1$ isto é um absurdo já que o número 1 é inteiro e $0,999999\cdots$ é um número racional decimal com uma infinidade de algarismos nove. Assim é melhor entender que $0,999999\cdots \approx \frac{9}{9} = 1$

• Os números irracionais são aqueles números decimais não periódicos. Por exemplo:

$\sqrt{5} = 2,2360679774997896\cdots;$ $\qquad \sqrt{19} = 4,35889894354067\cdots$

$\pi = 3,14159265358979323846\cdots$; $\qquad -\sqrt[3]{28} = -3,03658897187\cdots$

A *Figura* (1.1) mostra mediante diagramas de Venn[4] a relação de inclusão entre os conjuntos.

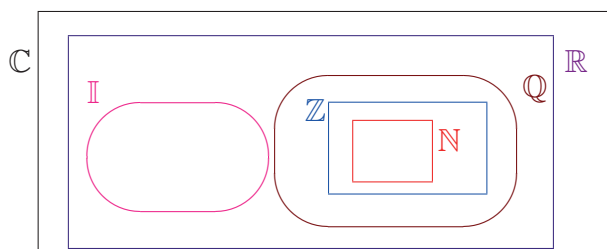



Figura 1.1: Conjunto Numérico

Notações:

$\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} - \{0\} = \{\, 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ n, \cdots\}$

$\mathbb{Z}^+ = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \cdots\}$

É importante destacar que o número zero não é número positivo nem negativo.

Suponha temos que realizar operações aritméticas elementares (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radicação) com dois números quaisquer de um subconjunto dos números reais, e desejamos que o resultado pertença ao mesmo subconjunto.

Observe, com os números naturais 4 e 7 não é possível efetuar a operação $4-7$ (subtração), pois sabemos que $4-7=-3$ não pertence ao conjunto $\mathbb{N}$. Assim, em geral temos que no conjunto numérico:

[4]John Venn (1834 – 1923) publicou "Lógica Simbólica" em 1881 e, "Os Princípios de Lógica Empírica" em 1889. O segundo destes é menos original que o primeiro, porém é descrito como o trabalho mais duradouro em lógica.

$\mathbb{N}$ somente é possível efetuar operações de adição e multiplicação.

$\mathbb{Z}$ somente é possível efetuar operações de adição, subtração e multiplicação.

$\mathbb{Q}$ é possível efetuar operações de adição, subtração , multiplicação e divisão (desde que o divisor não seja zero).

$\mathbb{I}$ é possível efetuar operações de modo restrito.

$\mathbb{R}$ podemos efetuar operações de adição, subtração, multiplicação e divisão (desde que o divisor não seja zero).

$\mathbb{C}$ é possível efetuar operações de adição, subtração, divisão (com divisor não zero), multiplicação, potenciação e radicação.

O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ tem mais propriedades que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Nosso objetivo neste capítulo será estudar as propriedades importantes do conjunto $\mathbb{R}$. Mostra-se que, $\mathbb{Q} \bigcap \mathbb{I} = \emptyset$.

Aos elementos de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ é possível associar um ponto de uma reta, de modo que a este número real $\mathbf{x}$ corresponda um, e somente um, único ponto $\mathcal{P}$ como indica a *Figura* (1.2).

Figura 1.2: Reta numérica

> **Definição 1.1.** *Sistema de números reais.*
> *Dizemos* "sistema de números reais" *ao conjunto* $\mathbb{R}$*, no qual estão definidas as operações de adição* $(+)$*, multiplicação* $(\star)$*, uma relação de ordem* $(<\ )$ *que se lê "menor que" e o axioma do supremo.*

O sistema de números reais pode ser denotado como $(\mathbb{R},\ +,\ \star,\ <\ )$ ou simplesmente escreve-se $\mathbb{R}$.

Outra notação para a multiplicação é um ponto. Assim, por exemplo, se $\mathbf{a},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}$, temos $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ significa multiplicação (*produto*) dos números $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

1.2.1 Adição e Multiplicação com números reais

Adição é uma das operações básicas da aritmética. Na sua forma mais simples, adição combina dois números (termos, somandos ou parcelas) em um único número chamado "*a soma*". Adicionar mais números corresponde a repetir a operação.

Pode também ser uma operação geométrica, a partir de dois segmentos de reta dados determinar um outro cujo comprimento seja igual à soma dos dois iniciais.

Definição 1.2. *Lei de composição interna.*
Seja A subconjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Lei de composição interna sobre um conjunto A é uma relação em que, a cada par de elementos de $a, b \in A$ corresponde outro elemento $c \in A$.

Exemplo 1.1.

- *Dados* $8, 9 \in \mathbb{N}$ *temos* $8+9 = 17 \in \mathbb{N}$. *Aqui, a lei de composição interna é a adição.*
- *Dados* $12,\ 4 \in \mathbb{R}$ *temos* $\dfrac{12}{4} = 3 \in \mathbb{R}$. *Aqui, a lei de composição interna é a divisão.*
- *Dados* $18,\ 7 \in \mathbb{N}$ *temos* $7 - 18 = -11 \notin \mathbb{N}$. *Aqui, não existe lei de composição interna.*

Consideremos dois axiomas definidos no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Estes axiomas definidos pelas leis de composição interna são:
Axioma da Adição (Soma):
Para todo número real **a** e **b**, temos que $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ é um número real.
Axioma da Multiplicação (Produto):
Para todo número real **a** e **b**, temos que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ é um número real.
Onde estes axiomas da adição e a multiplicação de números reais cumprem as seguintes propriedades:

A1 $\forall\ a, b\ \in \mathbb{R} \qquad a + b = b + a$ (comutativa)

A2 $\forall\ a,\ b,\ c\ \in \mathbb{R} \qquad (a+b)+c = a+(b+c)$ (associativa)

A3 $\exists\ 0\ \in \mathbb{R}\,/.\quad a+0 = 0+a = a \qquad \forall\, a\ \in \mathbb{R}$ (neutro)

A4 $\forall\ a\ \in \mathbb{R},\quad \exists\ -a\ \in \mathbb{R}\,/.\quad a+(-a)\ =\ (-a)+a\ =\ 0$ (inverso aditivo)

P1 $\forall\ a,\ b\ \in \mathbb{R} \qquad a.b\ =\ b.a$ (comutativa)

P2 $\forall\, a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \quad (a.b).c\ =\ a.(b.c)$ (associativa)

P3 $\exists\ 1 \in \mathbb{R}\,/.\quad a.1 = 1.a = a \quad \forall\ a\ \in \mathbb{R}$ (neutro)

P4 $\forall\ a \in \mathbb{R},\quad a \neq 0,\quad \exists\, a^{-1} \in \mathbb{R}\,/.\quad a.a^{-1}\ =\ a^{-1}.a\ =\ 1$ (inverso multiplicativo)

D1 $\forall\ a,\ b,\ c\ \in \mathbb{R} \qquad a.(b+c)\ =\ a.b\ +\ a.c$ (distributiva)

D2 $\forall\ a,\ b,\ c\ \in \mathbb{R} \qquad (a+b).c\ =\ a.c\ +\ b.c$ (distributiva)

Propriedade 1.1.
Para todos os números reais a, b, c temos as seguintes propriedades :

1. Os elementos neutro, inverso aditivo e multiplicativo são únicos.

2. $a = -(-a)$.

3. Se $a \neq 0$ então $a = (a^{-1})^{-1}$.

4. $a.0 = 0.a = 0$.

5. $-a = (-1).a$.

6. $a.(-b) = (-a).b = -(a.b)$

7. $(-a).(-b) = a.b$

8. $a + c = b + c$ se, e somente se $a = b$.

9. Se $a.c = b.c$ e $c \neq 0$, então $a = b$.

10. $a.b = 0$ se, e somente se $a = 0$ ou $b = 0$.

11. $a^2 = b^2$ se, e somente se $a = b$ ou $a = -b$.

Demonstração. (2)

Pelo *Axioma* **A4**, temos: $\forall\, a \in \mathbb{R}$ existe $-a \in \mathbb{R}$ que cumpre a igualdade $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Assim para todo $(-a) \in \mathbb{R}$ existe $-(-a) \in \mathbb{R}$ que cumpre a igualdade $(-a)+(-(-a)) = (-(-a))+(-a) = 0$. Então $a+(-a)+(-(-a)) = (-(-a))+a+(-a)$; isto é $a = -(-a)$. □

Demonstração. (4)

$a.0 = a(0 + 0)$; pois $0 = 0 + 0$

Logo, pelo *Axioma* **D1** segue $a.0 = a \cdot (0 + 0) = a.0 + a.0$, então $a.0 = 0$ □

Demonstração. (5)

$a + (-1)a = 1.a + (-1).a$	isto de $a = 1.a$
$= [1 + (-1)].a$	distributividade
$= 0$	$[1 + (-1)] = 0$ e $a.0 = 0$

então, aplicando o *Axioma* **A4** para a, segue $(-1)a = -a$ □

Demonstração. (9)

$a = a(c.c^{-1})$	isto de $a = a.1$ e $1 = c.c^{-1}$ pois $c \neq 0$
$= (a.c).c^{-1} = (b.c).c^{-1}$	por hipótese.
$= b(c.c^{-1}) = b$	$c \cdot c^{-1} = 1$ e $b \cdot 1 = b$

□

Demonstração. (10)

Suponhamos $a = 0$ ou $b = 0$. Então pela *Propriedade* (1.1)-(4) segue $a \cdot b = 0$.

Por outro lado, suponha.

Suponhamos $a \cdot b = 0$ e que $a \neq 0$. Então $a^{-1}(a.b) = a^{-1}.0 = 0$, isto é $(a^{-1} \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = 0$; logo $b = 0$. De modo análogo, suponha que $b \neq 0$. Logo $a = 0$.

Definição 1.3.
A diferença e o quociente de dois números reais é definido por:

1. $a - b = a + (-b)$ diferença.
2. $\dfrac{a}{b} = a.b^{-1}$ se $b \neq 0$ quociente

Propriedade 1.2.
Para todos os números reais a, b, c, d, temos:

1. $a - b = -(b - a)$.
2. $a - b = c$, então $a = b + c$.
3. $a.(b - c) = a.b - a.c$.
4. Se $b \neq 0$ e $d \neq 0$, então $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$.
5. Se $b \neq 0$ e $d \neq 0$, então $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad - bc}{bd}$.
6. Se $a \neq 0$ e $ax + b = c$, então $x = \dfrac{c - b}{a}$.

Demonstração. (1)

Sendo a e b números reais, então $a - b$ é um número real. Logo existe seu oposto aditivo $-(a - b)$. Assim $(a - b) + (-(a - b)) = 0$.

Pela *Definição* (1.3) segue:

$$(a - b) - (a - b) = 0 \qquad \text{ou} \qquad a + (-b) - (a - b) = 0 \tag{1.1}$$

Por outro lado, $-(b-a)$ é um número real, logo existe seu inverso aditivo $-[-(b-a)]$, logo $-(b-a) + \{-[-(b-a)]\} = 0$. Assim pela *Propriedade* (1.1)-(2) temos : $-(b-a) + (b - a) = 0$ então

$$-(b - a) + b + (-a) = 0 \tag{1.2}$$

De (1.1) e (1.2) temos $(a + (-b) - (a - b)) + (-(b - a) + b + (-a)) = 0$, isto é $-(a - b) + (-(b - a)) = 0$; onde pela *Propriedade* (1.1)-(8) do oposto aditivo de $(a - b)$ resulta $-(b - a)) = (a - b)$. □

Demonstração. (6)

Sejam $a \neq 0$ e $ax + b = c$, então pela *Propriedade* (1.2)-(2) concluímos $ax = c - b$.

Pelo oposto multiplicativo do número $a \neq 0$ temos $a^{-1}(ax) = a^{-1}(c-b)$ e, pelo Axioma *P3* e *Definição* (1.3)-*(2)* resulta $x = \dfrac{c - b}{a}$ □

Demonstração. (2) - (5)

Exercício para o leitor.

Definição 1.4. *Número par.*

Dizemos que $a \in \mathbb{Z}$ é número par se existe $\beta \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2\beta$.

Em $\mathbb{Z}$, todo número que não é par, é denominado número ímpar.

Observação 1.1.

1. *Todo número ímpar $b \in \mathbb{Z}$ é da forma $b = 2\alpha + 1$, para $\alpha \in \mathbb{Z}$.*

2. *Segundo nossa definição de número par, o zero é par.*

Definição 1.5. *Divisor comum.*

Sejam os números $a,\ b, d \in \mathbb{Z}$ se, d divide a a e b, o número d é chamado divisor comum de a e b.

Propriedade 1.3.

Dados os números inteiros a e b, existe um divisor comum da forma $d = ax + by$ para algum $x,\ y \in \mathbb{Z}$; e, todo divisor comum de a e b divide este d.

A demonstração é exercício para o leitor.

Definição 1.6. *Máximo divisor comum.*

O máximo divisor comum dos números a e b não nulos (escritos como produto de fatores primos) denotado $mdc\{a,\ b\}$ é o produto dos fatores comuns a eles, cada um elevado ao menor expoente.

Definição 1.7. *Mínimo múltiplo comum.*

O mínimo múltiplo comum dos números a e b não nulos (escritos como produto de fatores primos) denotado $mmc\{a,\ b\} = \dfrac{ab}{mdc\{a,\ b\}}$.

Definição 1.8. *Números primos.*

Seja $n \in \mathbb{Z}$, dizemos que n é número primo, se $n > 1$ e seus únicos divisores positivos são 1 e o próprio n. Se n não é número primo então é chamado de número composto.

Exemplo 1.2.

- *São números primos:* 2, 3, 7, 11 13, 17, 19
- *Não são números primos, são números compostos:* 4, 6, 8, 10, 16, 24.

Propriedade 1.4.

Todo número inteiro $n > 1$ é número primo ou produto de números primos.

A demonstração é exercício para o leitor.

Propriedade 1.5. *Algoritmo de Euclides.*

Para quaisquer dois números inteiros não nulos a e b, existem inteiros únicos q e r, denominados, respectivamente, o quociente e o resto ou resíduo, tais que:

$$a = bq + r, \qquad 0 \leq r < b$$

A demonstração é exercício para o leitor.

Exemplo 1.3.

(a) $-2805 = -24(119) + 51$ **(b)** $758 = 3(242) + 32$

(c) $780 = -16(-48) + 12$ **(d)** $826 = 33(25) + 1$

Definição 1.9. *Números relativamente primos.*

Dizemos que dois números $a, b \in \mathbb{Z}$ são relativamente primos, se o $\text{mdc}\{a, b\} = 1$.

Exemplo 1.4.

Os seguintes conjuntos, são de números relativamente primos:

$A = \{8, 9\}$ $B = \{86, 25\}$ $C = \{32, 49\}$ $D = \{18, 19\}$

Exemplo 1.5.

Emprestei os $\dfrac{2}{3}$ dos $\dfrac{5}{6}$ dos $\dfrac{3}{5}$ de um dinheiro que tinha e ainda tenho de um $\dfrac{1}{5}$ de milhão de reais. Que quantidade de dinheiro emprestei ?

Solução.

O significado matemático das palavras "*dos*", "*das*", "*do*", "*de*", podemos entender como se for o operador da multiplicação.

Suponha que tinha x reais. Emprestei $(\frac{2}{3})(\frac{5}{6})(\frac{3}{5})x$, logo tenho $(\frac{1}{5})(1000,000)$. Assim:

$$x - (\frac{2}{3})(\frac{5}{6})(\frac{3}{5})x = (\frac{1}{5})(1.000.000) \quad \Rightarrow$$

$$x - \frac{1}{3}x = 200.000 \Rightarrow \frac{2}{3}x = 200.000 \Rightarrow x = 300.000$$

Portanto, tinha 300.000 reais e emprestei R$100.000.

Exemplo 1.6.

Ao chegar a minha casa encontrei várias aranhas e baratas, depois de matar estes 16 *insetos, contei o número de patas e observei que eram* 108. *Calcular quantas baratas e aranhas encontrei ao chegar a casa.*
Solução.

É suficiente sabermos o número de patas que cada inseto possui, e em seguida analisar os dados e o que se pede no problema.

Suponha, que existam b baratas e $(16 - b)$ aranhas. Como, cada barata tem 6 patas e cada aranha tem 8 patas, temos que: $6b + 8.(16 - b) = 108$. Logo, $b = 10$.

Portanto, o total de baratas que encontrei foram 10 e as aranhas totalizaram seis.

Exemplo 1.7.

Um fabricante de latas, deseja fabricar uma lata em forma de cilindro circular reto com $10\,cm$ *de raio e* $6283,2\,cm^3$ *da capacidade. Determine sua altura.*
Solução.

Sabemos que o volume V, do cilindro circular reto de raio r e altura h é dado pela fórmula $V = \pi r^2 h$. Pelos dados do problema temos $r = 10\,cm$, $V = 6283,2\,cm^3$. Assim na fórmula

$$6.283,2\,cm^3 = \pi(10cm)^2.h \Rightarrow 6.283,2\,cm^3 = (3,1416)(100\,cm^2).h \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 6.283,2\,cm^3 = (314,16\,cm^2).h \Rightarrow h = \frac{6.283,2\,cm^3}{314,16cm^2} = 20\,cm$$

Portanto altura do cilindro deverá medir $20\,cm$.

Exemplo 1.8.

A média aritmética de 8 *números é* 6*; já a média aritmética de outros* 6 *números é* 8. *Então a média aritmética desses* 14 *números é:*
Solução.

Suponhamos temos os números $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_7,\ a_8$ e $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots b_5, b_6$. Pelos dados do problema temos que:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_7 + a_8}{8} = 6 \quad \text{e} \quad \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_5 + b_6}{6} = 8$$

Então, $a_1 + a_2 + \cdots + a_7 + a_8 = (8)(6)$ e $b_1 + b_2 + \cdots + b_5 + b_6 = (6)(8)$, logo: $[a_1 + a_2 + \cdots + a_7 + a_8] + [b_1 + b_2 + \cdots + b_5 + b_6] = (8)(6) + (6)(8) = 96$.

Logo, $\dfrac{[a_1 + a_2 + \cdots + a_7 + a_8]}{8+6} + \dfrac{[b_1 + b_2 + \cdots + b_5 + b_6]}{8+6} = \dfrac{96}{14} = 6,84.$

Portanto, a média aritmética desses 14 números é $6,84$.

Exemplo 1.9.

Quantos litros de óleo devem ser adicionados a 10 *litros de uma mistura que contém* 15% *de óleo, para obter outra mistura que contenha* 25% *de óleo?*

Solução.

Suponha que na mistura original tenhamos que adicionar x litros de óleo.

Observando a *Figura* (1.3), temos:

$$10(\frac{15}{100}) + x = \frac{25(10+x)}{100}$$

Resolvendo a equação temos que $x = \dfrac{4}{3}$.

Portanto, teremos que adicionar $\dfrac{4}{3}$ litros de óleo.

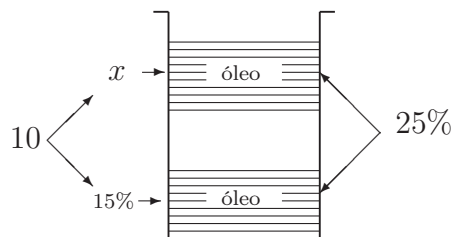



Figura 1.3:

Exemplo 1.10.

Lançam-se dois dados não-tendenciosos. Qual a probabilidade da soma dos pontos ser igual a 7 ?

Solução.

Com os dados D_1 e D_2 podemos obter os conjunto de casos possíveis:

$$D_1 \times D_2 = \{(1,1), \ldots, (1,6), (2,1), \ldots, (2,6), (3,1), \ldots, (4,1), \ldots, (5,1), \ldots (6,5), (6,6)\}$$

Os casos favoráveis são $\{\ (1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1)\ \}$.

Podemos observar que há $6 \times 6 = 36$ resultados possíveis igualmente prováveis, em 6 dos quais a soma vale 7.

A probabilidade da soma dos pontos ser igual a 7 é $P = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

Observação 1.2.

Sendo a, b, c *três algarismos escreveremos* $\overline{abc}$ *para indicar que*

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c$$

em geral, se $a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \cdots a_1 a_0$ *são algarismos,*

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1 a_0} = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + 10^{n-2} a_{n-2} \cdots 10a_1 + a_0$$

é chamada "decomposição polinômica de um número na base decimal."

Exercícios 1-1

1. Sejam, $\mathbb{N}$ o conjunto de números naturais e $\mathbb{Z}$ o conjunto de números inteiros. Determine quais dentre as seguintes proposições é verdadeira (**v**) e qual é a falsa (**f**).

   1. $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$ **2.** $\mathbb{N}^+ = \mathbb{Z}$ **3.** $\mathbb{N}^+ = \mathbb{Z}^+$ **4.** $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

2. Das seguintes proposições qual é verdadeira (**v**) ou falsa (**f**).

   1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ **2.** $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ **3.** $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$
   4. $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{I}$ **5.** $\mathbb{N} \subset (\mathbb{Q} - \mathbb{Z})$ **6.** $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Q}$
   7. $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ **8.** $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}^+ = \mathbb{N}$

3. Verifique quais das seguintes proposições são verdadeiras:

   1. $7,43333... \in \mathbb{I}$ **2.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{Q}$ **3.** $5,41 \in (\mathbb{Q} - \mathbb{Z})$ **4.** $-5 \notin \mathbb{Q}$
   5. $2,71854 \notin \mathbb{I}$ **6.** $0 \notin \mathbb{Z}$ **7.** $\sqrt{-7} \notin \mathbb{R}$ **8.** $-\dfrac{3}{5} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

4. Construa um diagrama contendo os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ e situe os seguintes números:

   1. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **2.** $\sqrt{-3}$ **3.** 0 **4.** $\dfrac{3}{8}$ **5.** $8,43$
   6. $\dfrac{\pi}{2}$ **7.** -5 **8.** $-0,60$ **9.** $2,573$ **10.** $0,333\cdots$
   11. $-\dfrac{10}{3}$ **12.** $\dfrac{0}{3}$ **13.** $-(-\dfrac{5}{2})^2$

5. Mostre que, se $x^2 = 0$, então $x = 0$.

6. Mostre que, se p é número ímpar, então p^2 é ímpar.

7. Mostre que, se p é número par, então p^2 é par.

8. **1.** Se a é racional e b irracional, $a + b$ necessariamente é irracional?

   2. Se a é irracional e b irracional, $a + b$ necessariamente é irracional?

   3. Se a é racional e b irracional, ab necessariamente é irracional?

4. Existe número real a tal que a^2 seja irracional, porém a^4 racional?

5. Existem dois números irracionais tais que sua soma e produto sejam racionais?

9. Mostre que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

10. Um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ diz-se estável aditivamente se, $\forall\, a, b \in A$ temos $(a+b) \in A$; e estável multiplicativamente se, $\forall\; a,\; b \in A$ temos $(a \cdot b) \in A$.

    1. Dados os conjuntos $A = \{\,2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots\}$ e $B = \{\,1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots\}$, determine se eles são conjuntos estáveis aditiva e multiplicativamente.

    2. Dados os conjuntos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ determine quais são estáveis respeito das operações de: **i)** adição; **ii)** multiplicação.

11. Mostre que 2 e 3 são as únicas raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

12. Transforme cada uma das expressões em um único radical:

    1. $\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{z}}}$ **2.** $\sqrt[3]{x\sqrt[3]{y\sqrt[3]{z}}}$ **3.** $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{y\sqrt{z}}}$

13. Determine a condição para que seja possível expressar $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ na forma $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, onde $a,\ b,\ x$ e y sejam números racionais.

14. Escreva as expressões abaixo como uma soma de radicais:

    1. $\sqrt{12+\sqrt{140}}$ **2.** $\sqrt{13-\sqrt{160}}$ **3.** $\sqrt{9-\sqrt{72}}$

15. Simplifique as seguintes expressões:

    1. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}$ **2.** $\dfrac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{3}} + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2+\sqrt{3}}$ **3.** $(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3})^2$

16. Sejam $a,\ b,\ c,\ d,\ m,\ n$ e p números reais positivos. Mostre que se $\dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{n} = \dfrac{c}{p}$ então $\sqrt{am} + \sqrt{bn} + \sqrt{cp} = \sqrt{(a+b+c)(m+n+p)}$.

17. Dados os números $a = 710$ e $b = 68$.

    1. Determine o máximo divisor comum de a e b.

    2. Determine o mínimo múltiplo comum de a e b.

18. Há seis anos, a idade de Alberto era quatro vezes a idade de Pedro. Calcular suas idades atuais sabendo que, dentro de quatro anos, Alberto só terá o dobro da idade de Pedro.

19. A idade de Maria é $\dfrac{1}{2}$ (metade) de $\dfrac{2}{3}$ da idade de Marisa. Se Marisa tem 24 anos. quantos anos têm Maria?

20. A soma das idades de 3 pessoas é 97. A maior tem 29 anos mais que a menor, e a do meio 18 anos menos que a maior, Calcular a idade de cada uma.

21. Quanto de água deve ser adicionada a 100 cm^3 de 80% de uma solução de ácido bórico, para reduzir-la a 50% da solução ?

22. Ao dividir o número **D** por **d** obtemos como quociente **q** e como resto **r**. Se aumentarmos o dividendo **D** em 15 unidades e o divisor **d** em 5 unidades, o quociente e resto originais permanecem iguais. Qual foi o quociente?

23. Compram-se cadernos de forma progressiva da seguinte maneira: no primeiro dia 14 cadernos; no segundo dia 15 cadernos; no terceiro dia 16 cadernos e assim sucessivamente. Depois de 30 dias consecutivos comprando, quantos cadernos foram comprados no total ?

24. O denominador de uma fração decimal é 3 a menos que o dobro do numerador. Se o numerador aumenta em 5 e o denominador em 14, o valor da fração é 7/15. Determine a fração.

25. **Expedição**: Planeta K

    Informe: Ao chegar ao planeta K, achamos seres vivos como em nosso planeta, embora também tenham 20 dedos, eles têm um membro a menos, e um dedo a mais em cada membro.

    Pergunta-se: Possívelmente que tipo de seres habitam o planeta K ?

26. Determine dois números tais que sua soma, produto e quociente sempre sejam iguais.

27. Uma lebre seguida por um galgo leva uma vantagem de 50 saltos. O galgo dá 5 saltos enquanto que a lebre dá 6 saltos, mas, 9 saltos da lebre equivalem a 7 do galgo. Quantos saltos dará a lebre antes de ser alcançada pelo galgo ?

28. Uma sequência de números reais é dita uma progressão aritmética de segunda ordem quando a seqüência formada pelas diferenças entre termos sucessivos for uma progressão aritmética. Assinale a alternativa na qual se encontra parte de uma progressão aritmética de segunda ordem.

    A)={0, 5, 12, 21, 23} **B)**= {6, 8, 15, 27, 44} **C)** = {-3, 0, 4, 5, 8}

    D) = {7, 3, 2, 0, -1} **E)** ={2, 4, 8, 20, 30}

29. Mostre que, se p é um número primo e $a_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2, 3, \cdots, n$, então:

    $(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)^p = a_1^p + a_2^p + a_3^p + \cdots + a_n^p + kp$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.

30. Sejam $a,\ b \in \mathbb{Z}$ tais que $(a,\ b) = 1$ sendo a e b diferentes de zero. Mostre que existem $x,\ y \in \mathbb{Z}$ tais que $\dfrac{1}{ab}$ podemos escrever na forma $\dfrac{1}{ab} = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$

31. Mostre que todo quadrado perfeito é da forma $5n$ ou $5n \pm 1$ para $n \in \mathbb{Z}$.

32. Verificar que todo número natural composto por cinco algarismos $n = \overline{xmdcu}$ é múltiplo de:

    1. 2 se, e somente se, $u = 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$. Isto é, se o algarismo das unidades de n for múltiplo de 2

    2. 3 (ou 9) se, e somente se,a soma $x + m + c + d + u$ for divisível por 3 (ou 9). Onde $x,\ m,\ c,\ d,\ u$ são os algarismos de n

    3. 4 se, e somente se, o número $\overline{du}$ for múltiplo de 4, ou n é da forma $a = \overline{xm200}$.

    4. 5 se, e somente se, $u = 0$ ou $u = 5$.

    5. 6 se, e somente se, n for divisível por 2 e 3.

    6. 8 (ou 125) se, e somente se,o número $\overline{cdu}$ for divisível por 8 (ou 125), ou n da forma $n = \overline{x000}$.

    7. 11 se, e somente se, $(d + m) - (x + c + u)$ for divisível por 11.

    8. 25 se, e somente se, o número $\overline{du}$ for múltiplo de 25, ou $\overline{du} = 00$.

33. Determine uma regra que permita saber se um número natural n é múltiplo de 7.

34. Uma aranha se encontra no vértice A de um cubo sólido cuja aresta é de $10cm$, e tem a intenção de capturar uma mosca que se encontra no vértice oposto B (ver Figura (1.4)). A aranha deve caminhar sobre a superfície do cubo sólido e encontrar o caminho mais curto. Encontre o comprimento desse caminho.

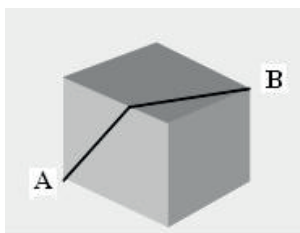



Figura 1.4:

1.3 Relação de ordem

Axioma 1.1. *De existência.*

No conjunto $\mathbb{R}$, existe um subconjunto denotado $\mathbb{R}^+$, chamado, "conjunto dos números reais positivos", que cumpre o seguinte:

i) Todo número real a cumpre uma e somente uma das seguintes condições:

$$a \in \mathbb{R}^+, \qquad -a \in \mathbb{R}^+, \qquad \text{ou} \qquad a = 0$$

ii) Se $a \in \mathbb{R}^+$ e $b \in \mathbb{R}^+$, então $\quad a + b \in \mathbb{R}^+ \quad$ e $\quad a \cdot b \in \mathbb{R}^+$.

Definição 1.10.
Sejam $a,\ b \in \mathbb{R}$, diz-se que "a é menor que b" e se escreve $a < b$, somente quando $(b - a) \in \mathbb{R}^+$.

Desta definição temos que $a \in \mathbb{R}^+$ se, e somente se, $(a - 0) \in \mathbb{R}^+$, logo $0 < a$.

Observação 1.3.

i) *Se $a < b$, podemos escrever $b > a$, e se lê "b é maior que a".*

ii) *Diz-se que "a é menor ou igual que b" e se escreve $a \leq b$ se e somente se $a < b$ ou $a = b$.*

iii) $\mathbb{R}^+ = \{\, a \in \mathbb{R} \,/. \quad 0 < a\} = \{a \in \mathbb{R} \,/. \quad a > 0\}$.

iv) *$a \in \mathbb{R}^+$ se, e somente se, $0 < a$, também podemos escrever $a > 0$.*

Propriedade 1.6.

Para todo número real $a,\ b,\ c,\ d$ temos:

1. $a = b \quad$ ou $\quad a < b \quad$ ou $\quad a > b$ — tricotomia
2. $a^2 \geq 0, \quad \forall\, a \in \mathbb{R} \quad (a^2 > 0 \quad \text{se} \quad a \neq 0)$ — positividade
3. Se $a < b \quad$ e $\quad b < c$, então $\quad a < c$ — transitiva
4. Se $a < b$, então $\quad a + c < b + c \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$ — monotonia na soma
5. Se $a < b \quad$ e $\quad c < d$, então $\quad a + c < b + d$
6. Se $a < b \quad$ e $\quad c > 0$, então $\quad a.c < b.c$ — monotonia no produto
7. Se $a < b \quad$ e $\quad c < 0$, então $\quad a.c > b.c$.

8. Se $a < b$, então $-a > -b$.

9. Se $a > 0$, então $a^{-1} > 0$ (Se $a < 0$, então $a^{-1} < 0$)

10. Se $0 < a < b$, então $a^{-1} > b^{-1} > 0$ (Se $a < b < 0$ então $0 > a^{-1} > b^{-1}$)

11. $ab \geq 0$ se e somente se $(a \geq 0$ e $b \geq 0)$ ou $(a \leq 0$ e $b \leq 0)$

12. $ab \leq 0$ se e somente se $(a \geq 0$ e $b \leq 0)$ ou $(a \leq 0$ e $b \geq 0)$

13. Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$; $a \leq b$ se e somente se $a^2 \leq b^2$.

14. $a^2 + b^2 = 0$ se e somente se $a = 0$ e $b = 0$.

15. Se $a^2 \leq b$, então - $\sqrt{b} \leq a \leq \sqrt{b}$

16. $a^2 \geq b$, então $a \geq \sqrt{b}$ ou $a \leq -\sqrt{b}$

Demonstração. (1)

Sejam a, $b \in \mathbb{R}$. Então, $a - b \in \mathbb{R}$, pelo *Axioma* (1.1)-(**i**), temos que uma e somente uma das seguintes condições se cumpre: $a - b \in \mathbb{R}^+$ ou $-(a - b) \in \mathbb{R}^+$ ou $a - b = 0$.

Então, $a - b > 0$ ou $b - a > 0$ ou $a = b$, isto é, $a > b$ ou $b > a$ ou $a = b$.

Em particular, se $a \in \mathbb{R}$, então $a > 0$ ou $a < 0$ ou $a = 0$. □

Demonstração. (2)

Se $a \in \mathbb{R}$ então $a = 0$ ou $a \neq 0$.

$$a = 0 \Rightarrow a^2 = 0 \tag{1.3}$$

Se $a \neq 0$, então $a \in \mathbb{R}^+$ ou $-a \in \mathbb{R}^+$, logo $a^2 = a.a \in \mathbb{R}^+$ ou

$$a^2 = (-a)(-a) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a^2 > 0 \tag{1.4}$$

De (1.3) e (1.4) segue que $a^2 \geq 0$. □

Demonstração. (6)

Se $a < b$ e $c > 0$ então $b - a \in \mathbb{R}^+$ e como $c \in \mathbb{R}^+$, logo $c(b - a) \in \mathbb{R}^+$.

Assim, $(bc - ac) \in \mathbb{R}^+$, logo $(bc - ac) > 0$, então $bc > ac$ ou $ac < bc$. □

Demonstração. (9)

Seja $a > 0$, então existe a^{-1} e pelo *Axioma* (1.1) temos $a^{-1} > 0$ ou $a^{-1} < 0$ ou $a^{-1} = 0$. Este último caso $a^{-1} = 0$ é impossível, pois teríamos que $a.a^{-1} = a.0 = 0$ o que levaria à igualdade $1 = 0$ que é um absurdo.

Se $a.a^{-1} < 0$, então pela propriedade da monotonia do produto resulta: $a^{-1}.a < 0.a$, então $1 < 0$, que é um absurdo.

Assim, resulta que se $a > 0$, então $a^{-1} > 0$. □

Demonstração. (11)

Pela *Propriedade* (1.1)-(10), se $ab > 0$ então $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Portanto quando $a > 0$ temos $a^{-1} > 0$. Assim $b = a^{-1}(a.b) > 0$.

Analogamente, se $a < 0$ então $a^{-1} < 0$ e $b = a^{-1}(a.b) < 0$.

Portanto, se $a.b > 0$ então ($a < 0$ e $b < 0$) ou ($a > 0$ e $b > 0$) □

As demais propriedades são exercícios para o leitor.

Definição 1.11.

Uma equação é uma expressão algébrica que contém o símbolo da relação de igualdade.

São exemplos de equações: $x + 7 = 3$; $x^2 - 5 = x$; $\sqrt{2x - 5} = x^4 - 6x$.

No que segue, entenderemos que "*resolver uma equação* $E(x) = 0$", onde $E(x)$ é uma expressão algébrica, significa determinar números $x = a \in \mathbb{R}$ de modo que a igualdade $E(a) = 0$ seja verdadeira.

Por exemplo, ao resolver a equação $4x - 8 = 0$ obtemos $x = 2$, pois $4(2) - 8 = 0$. Por outro lado ao resolver a equação $x^2 + 9 = 0$ obtemos que $x^2 = -9$, a qual não tem solução em $\mathbb{R}$. Lembre-se que $x^2 \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Observação 1.4.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ *tais que* $b > 0$. *Se* $a^2 = b$ *diz-se que: "a é raiz quadrada de b" e denota-se* $a = \sqrt{b}$.

Por exemplo $\sqrt{4} = 2$ ou -2, pois $2^2 = (-2)^2 = 4$.

No que segue entenderemos $\sqrt{b}$ como a raiz quadrada positiva e -$\sqrt{b}$ como a raiz quadrada negativa. Assim, $\sqrt{4} = 2$ e -$\sqrt{4} = -2$.

Se $b < 0$, pela *Propriedade* (1.6)-(2) não existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a^2 = b$. Portanto em $\mathbb{R}$ não existe raiz quadrada de números negativos.

Propriedade 1.7. *Fórmula de Bhaskara.*[5].

Sejam a, b, $c \in \mathbb{R}$, *onde* $a \neq 0$, *então a solução da equação:* $ax^2 + bx + c = 0$, *é dada pela expressão:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Demonstração.

Dividindo a equação $ax^2 + bx + c = 0$ por $a \neq 0$ resulta a expressão $x^2 + (\frac{b}{a})x + \frac{c}{a} = 0$.

[5]Bhaskara Acharya ($1114 - 1185$), nascido na Índia. Foi ele quem preencheu algumas lacunas na obra de Brahmagupta, dando uma solução geral da equação de Pell e considerando o problema da divisão por zero.

Completando quadrados

$$x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}+(\frac{b}{2a})^2=(\frac{b}{2a})^2 \quad \Rightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=(\frac{b}{2a})^2-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Obtendo a raiz quadrada resulta: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ □

Exemplo 1.11.

Resolver a seguintes equações:

a) $3x+2=14-x$ **b)** $x^2-2x-3=0$

c) $x^4-13x^2+12=0$ **d)** $x^3-3x^2+x+2=0$

Solução. (a)

$3x+2=14-x$, então $(3x+2)+x=(14-x)+x$, logo $(3x+x)+2=14$, então $4x+2=14$. Pela *Propriedade* (1.2) - (6) vem que $x=\dfrac{14-2}{4}$, logo $x=3$ é solução da equação. □

Solução. (b)

$x^2-2x-3=0$, então $(x+1)(x-3)=0$, pela *Propriedade* (1.1)-(10) segue que $x=-1$ ou $x=3$.

De outro modo, completando quadrados $x^2-2x-3=0$ então $x^2-2x+1-3=0+1$ isto é $x^2-2x+1=4$, logo $(x-1)^2=4$. Da definição de raiz quadrada x - 1 = 2 ou x - 1 = -2 . Portanto $x=3$ ou $x=-1$ é solução da equação. □

Solução. (c)

$x^4-13x^2+12=0$ então $(x^2-12)(x^2-1)=0$, assim temos que $x^2-12=0$ ou $x^2-1=0$. De $x^2-1=0$ segue que $(x-1)(x+1)=0$, então $x=-1$ ou $x=1$ é solução. De $x^2-12=0$ segue que $(x-\sqrt{12})(x+\sqrt{12})=0$ e $x=-\sqrt{12}$ ou $x=\sqrt{12}$ é solução.

Portanto, $x=-1$, $x=1$, $x=-\sqrt{12}$ ou $x=\sqrt{12}$ são soluções da equação. □

Solução.(d)

$x^3-3x^2+x+2=0$, escrevendo na forma de fatores $x^3-3x^2+x+2=(x-2)(x^2-x-1)=0$, então $x-2=0$ ou $x^2-x-1=0$, completando quadrados a esta última igualdade resulta: $(x-\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}$.

De $x-2=0$ segue que $x=2$ é solução; de $(x-\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}$ segue que $x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$ ou $x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$ é solução.

Portanto, $x=2$, $x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$ ou $x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$ é solução da equação.

Exemplo 1.12.

Determinar o menor número positivo M *de modo que, para todo número real* x, *aconteça* $6x - x^2 \leq M$.

Solução.

De $6x - x^2 \leq M$ completando quadrados temos que $3^2 - 3^2 + 6x - x^2 \leq M$. Assim $9 - (x-3)^2 \leq M$. Quando $x = 3$ teremos o menor número positivo $M = 9$.

Observe, quando $M > 9$ também cumpre as condições da desigualdade.

Definição 1.12. *Parte inteira.*
A parte inteira de um número real x *denotada por* $[|x|]$ *é o maior número inteiro que não ultrapassa* x.

Desta definição resulta que o número $[|x|]$ é único, e sempre $[|x|] < x$. Por outro lado, como $[|x|]$ é o maior inteiro que cumpre esta desigualdade, e temos que $x < [|x|] + 1$. Portanto, $[|x|]$ é o número inteiro que cumpre as desigualdades: $[|x|] \leq x < [|x|] + 1$ ou $(x - 1) < [|x|] \leq x$.

Exemplo 1.13.

Das desigualdades: $3 < \pi < 4$, $\quad 5 < \dfrac{17}{3} < 6$, $\quad -2 < -\sqrt{2} < -1$ *e* $5 = 5 < 6$ *resulta que* $[|\pi|] = 3$, $\quad \left[\left|\dfrac{17}{3}\right|\right] = 5$, $\quad [|-\sqrt{2}|] = -2$ *e* $[|5|] = 5$.

Propriedade 1.8.

Seja x *um número real:*

i) $[|-x|] = \begin{cases} -[|x|] & \text{se} \quad x \in \mathbb{Z}. \\ -[|x|] - 1 & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$

ii) $[|x + y|] = [|x|] + [|y|]$ ou $[|x + y|] = [|x|] + [|y|] + 1$

iii) $[|x + n|] = [|x|] + n$ para todo inteiro n.

iv) $[|n \cdot x|] = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left[\left| x + \frac{k}{n} \right|\right]$

Demonstração.

Exercício para o leitor.

Exemplo 1.14.

a) $[|-5|] = -[|5|]$ **b)** $\left[\left|-\dfrac{1}{2}\right|\right] = -\left[\left|\dfrac{1}{2}\right|\right] - 1 = 0 - 1 = -1$

c) $\left[\left|\dfrac{5}{3} + \dfrac{13}{3}\right|\right] = \|6\|$ **d)** $\left[\left|\dfrac{5}{3} + \dfrac{13}{3}\right|\right] = \left[\left|\dfrac{5}{3}\right|\right] + \left[\left|\dfrac{13}{3}\right|\right] + 1 = 1 + 4 + 1 = 6$

e) $\left[\left|\frac{4}{3}+\frac{7}{5}\right|\right] = \left[\left|\frac{4}{3}\right|\right] + \left[\left|\frac{7}{5}\right|\right] = 1+1=2$

f) $\left[\left|\frac{4}{3}+\frac{7}{5}\right|\right] = \left[\left|\frac{20+21}{15}\right|\right] = \left[\left|\frac{41}{15}\right|\right] = 2$

g) $\left[\left|5\left(\frac{7}{9}\right)\right|\right] = \left[\left|\frac{7}{9}\right|\right] + \left[\left|\frac{7}{9}+\frac{1}{5}\right|\right] + \left[\left|\frac{7}{9}+\frac{2}{5}\right|\right] + \left[\left|\frac{7}{9}+\frac{3}{5}\right|\right] + \left[\left|\frac{7}{9}+\frac{4}{5}\right|\right] =$

$$= 0+0+1+1+1=3$$

Propriedade 1.9. *Princípio de Arquimedes*[6].

Se $a > 0$ e $b > 0$ são números reais, então existe um inteiro positivo n tal que $a \cdot n > b$

Demonstração.

Se $a > 0$, então $\frac{1}{a} > 0$, sendo $b > 0$ temos que $\frac{b}{a} > 0$.

Definimos o número $n = \left[\left|1+\frac{b}{a}\right|\right]$; isto é a parte inteira do número real $(1+\frac{b}{a})$. Da *Definição* (1.9) temos que $(1+\frac{b}{a}) - 1 < \left[\left|1+\frac{b}{a}\right|\right] = n$.

Portanto, $a \cdot n > b$. □

Exemplo 1.15.

Sejam $a,\ b \in \mathbb{R}^+$, tais que $a \cdot b = 1$. Mostre que $a+b \geq 2$.

Demonstração.

Da hipótese $a.b = 1$ temos que $0 < a \leq 1$ e $1 \leq b$, então $0 \leq (1-a)$ e $0 \leq (b-1) \Rightarrow 0 \leq (1-a)(b-1) = b-1-a.b+a = b-1-1+a$.

Portanto, $a+b \geq 2$.

Observação 1.5.

É importante lembrar algumas propriedades básicas de números reais:

i) $a^0 = 1$ somente se $a \neq 0$; caso $a = 0$ a expressão 0^0 não existe.

ii) $\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$, somente se $b \neq 0$; caso $b = 0$ então $\frac{a}{0}$ não existe.

iii) $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ desde que a e b sejam positivos, suponha $a = -1$ e $b = -1$, então $1 = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1}$ não existe em $\mathbb{R}$, o número 1 não devemos escrever com elementos que não existem em $\mathbb{R}$.

iv) A expressão $+\infty$ é a ideia de um número positivo, o maior de todos porém $(+\infty)$ - $(+\infty) = ?$, ou $\frac{+\infty}{+\infty} = ?$ são formas indeterminadas. Não se deve operar com os símbolos $+\infty$, $-\infty$, como se fossem números, pois não o são.

[6]Arquimedes (287 – 212 *a.C.*), chamado "o maior intelecto da antiguidade", foi um dos primeiros fundadores do método científico.

Aplicações com números reais

Exemplo 1.16.

Em ambas as margens de um rio crescem palmeiras, uma em frente à outra. A altura de uma é de $30\,m$*, e da outra é* $20\,m$*. A distância entre seus troncos é de* $50\,m$*.*

Na parte mais alta de cada palmeira descansam pássaros, de súbito dois pássaros (um em cada palmeira) avistam um peixe que aparece na superfície da água, entre as duas palmeiras. Os pássaros voarão e alcançaram o peixe ao mesmo tempo. Supondo a mesma velocidade; a que distância do tronco da palmeira menor apareceu o peixe?

Solução.

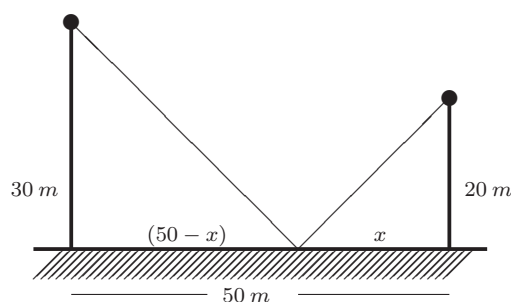
Suponhamos que o peixe apareceu a uma distância de x metros do pé da palmeira menor *Figura* (1.5), então pelo teorema de Pitágoras:

Figura 1.5:

$$\sqrt{20^2 + x^2} = \sqrt{30^2 + (50 - x)^2}$$

$$20^2 + x^2 = 30^2 + (50 - x)^2$$

$$x^2 - (50 - x)^2 = 30^2 - 20^2 \Rightarrow 2x - 50 = 10 \Rightarrow x = 30$$

Portanto, o peixe apareceu a uma distância de $30\,m$ da palmeira menor.

Exemplo 1.17.

Mostre a desigualdade $x = \dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}.\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{99}{100} < \dfrac{1}{10}$.

Solução.

Suponhamos $y = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{6}{7}\cdots\dfrac{100}{101}$, desde que:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \qquad \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \qquad \frac{5}{6} < \frac{6}{7}, \;\cdots\;, \; \frac{99}{100} < \frac{100}{101}$$

resulta que $x < y$ logo, $x^2 < xy = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{3}{4}.\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{5}{6}\dfrac{6}{7}\cdots\dfrac{99}{100}\cdot\dfrac{100}{101}$.

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros desta última desigualdade obtemos

$$x < \frac{1}{\sqrt{101}} < \frac{1}{10}$$

Exemplo 1.18.

Queremos construir uma caixa de papelão de $10\,cm$ *altura, sendo a base um retângulo de largura* $10\,cm$ *menos que seu comprimento. Se o volume da caixa deve ser de* $6000\,cm^3$*,*

quais as dimensões da caixa que suporta maior volume?
Solução.

Suponhamos que o comprimento seja $x\,cm$. Então segundo os dados do problema temos uma caixa como na *Figura* (1.6).

Logo $10x(x-10) = 6000 \Rightarrow x(x-10) = 600 \Rightarrow x^2 - 10x - 600 = 0$.

Pela *Propriedade* (1.7):

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4(-600)}}{2} = 5 \pm 25$$

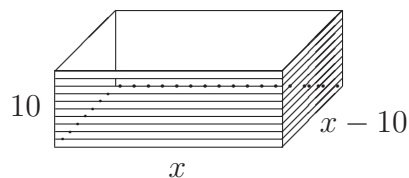



Figura 1.6:

Portanto $x = 30$, e as dimensões da caixa são: altura $10\,cm$, e comprimento da base $30\,cm$ e largura da base $20\,cm$. □

Exemplo 1.19.

Determine a parte inteira do número: $x = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
Solução.

Observe, calculando as raízes por falta e por excesso em menos de $0,1$ obtemos as desigualdades:

$1 \leq 1 \leq 1, \quad 0.7 < \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 0.8, \quad 0.5 < \dfrac{1}{\sqrt{3}} < 0.6, \quad 0.5 \leq \dfrac{1}{\sqrt{4}} \leq 0.5 \quad 0.4 < \dfrac{1}{\sqrt{5}} < 0.5$

Somando estas desigualdades, encontramos que $1 + 0.7 + 0.5 + 0.5 + 0.4 < x < 1 + 0.8 + 0.6 + 0.5 + 0.5$ isto é $3,1 < x < 3,4$.

Logo $[|x|] = 3$.

Exemplo 1.20.

Decompor o número 60 *em duas partes de modo que o produto de ambas as partes seja o maior possível.*
Solução.

Consideremos os números x e $60 - x$, observe que a adição de esses números é 60.

Seu produto é: $P = x(60-x) = 60x - x^2 = 30^2 - 30^2 + 2(30)x - x^2 = 30^2 - (30-x)^2$. Para que o produto seja o maior possível tem que acontecer que $x = 30$. logo os números são: 30 e $60 - 30$.

Portanto, os números são 30 e 30.

Exemplo 1.21.

Sabe-se que a média geométrica de n números, é sempre menor ou igual à sua média aritmética.

De todos os paralelepípedos com soma fixa de suas três arestas reciprocamente perpendiculares, determine o paralelepípedo de volume máximo.
Solução.

Seja $m = a + b + c$ a soma das arestas do paralelepípedo. Logo seu volume é $V = abc$. Aplicando a propriedade da média geométrica segue

$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} = \frac{m}{3} \quad \Rightarrow \quad V \leq \frac{m^3}{27}$$

O volume será máximo somente quando $V = \dfrac{m^3}{27}$ e isto acontece somente se $a = b = c = \dfrac{m}{3}$.

Portanto o paralelepípedo é o cubo. □

Exemplo 1.22.

Mostre que, se $a_i > 0 \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ então:

$$n \cdot a_1 a_2 a_3 . \cdots a_{n-1} a_n \leq a_1^n + a_2^n + a_3^n + \cdots + a_{n-1}^n + a_n^n$$

Solução.

Pela propriedade da média geométrica temos que:

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = \sqrt[n]{a_1^n a_2^n a_3^n \cdots a_{n-1}^n a_n^n} \leq \frac{a_1^n + a_2^n + a_3^n + \cdots + a_{n-1}^n + a_n^n}{n}$$

logo multiplicando por n segue:

$$n \cdot a_1 a_2 a_3 . \cdots a_{n-1} a_n \leq a_1^n + a_2^n + a_3^n + \cdots + a_{n-1}^n + a_n^n$$

Da desigualdade deduzimos:

$$2a_1a_2 \leq a_1^2 + a_2^2, \quad 3a_1a_2a_3 \leq a_1^3 + a_2^3 + a_3^3, \quad 4a_1a_2a_3a_4 \leq a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4$$

Exemplo 1.23.

Uma fila de cadeiras no cinema tem 10 poltronas. De quantos modos 3 casais podem se sentar nessas poltronas de modo que nenhum marido se sente separado de sua mulher?
Solução.

Lembrando que o fatorial de um número $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$ é definido por

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1), \quad 0! = 1 \ \text{ e } \ 1! = 1$$

Então, escolhida a ordem de cada casal, o que pode ser feito de 2^3 modos temos que arrumar em fila 4 espaços vazios e 3 casais, o que pode ser feito de $\dfrac{7!}{(3!)(4!)}$ modos (escolha dos espaços vazios) vezes 3! (colocação dos 3 casais nos 3 lugares restantes).

A resposta é $\quad 2^3 \times \dfrac{7!}{(3!)(4!)} \times 3! = 1.680.$

Exemplo 1.24.

Um mágico se apresenta usando um paletó cintilante e uma calça colorida e não repete em suas apresentações o mesmo conjunto de calça e paletó. Para poder se apresentar em 500 *espetáculos, qual o menor número de peças de roupa que pode ter seu guarda-roupa?*
Solução.

Seja c o número de calças e p o número de paletós.

Pelo princípio fundamental da contagem $c \cdot p = 500$. O menor número de e peças é $c + p$

Pela desigualdade das médias segue

$$\sqrt{c \cdot p} \leq \frac{c+p}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{c \cdot p} \leq c + p$$

Como $c \cdot p = 500$ então $2\sqrt{500} \leq c + p$, logo $44,72 \leq c + p$

Portanto o menor número de peças será 45.

Exercícios 1-2

1. Mostre que, se $0 < a < 1$ então $a^2 < a$.

2. Mostre que, $a > b \geq 0$ então $a^2 > b^2$ onde $a,\ b \in \mathbb{R}$.

3. Mostre que, se $a,\ b > 0$ e $a^2 > b^2$ então $a > b$.

4. Mostre que, se a e b são positivos (ou negativos) e $b > a$ então $a^{-1} > b^{-1}$.

5. Dados os números reais a e b, mostre que $2ab \leq a^2 + b^2$.

6. Mostre que, se $a > 0$ então $(a + \dfrac{1}{a}) \geq 2$.

7. Mostre que, se $a + b + c = 1$ onde, $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$, então temos que, $(1-a)(1-b)(1-c) \geq 8abc$.

8. Mostre que: Se $0 < a < b$, então $a \leq \sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2} \leq b$.

9. Mostre que: $\sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$ quando $a,\ b > 0$.

10. Mostre que, quando $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$, então $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$.

11. Mostre que: $a^3 + \dfrac{1}{a^3} > a^2 + \dfrac{1}{a^2}$ se $a > 1$.

12. Mostre que, se $a,\ b,\ c > 0$ então $\dfrac{bc}{a} + \dfrac{ac}{b} + \dfrac{ab}{c} > a + b + c$.

13. Determinar o menor número M de modo que, para todo número real x, tenha-se $2x - x^2 \leq M$.

14. Determinar o maior número M de modo que, para todo número real x, tenha-se $M \leq x^2 - 16x$.

15. Sejam a e b positivos, mostre que $\dfrac{a}{b^2} + \dfrac{b}{a^2} \geq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

16. Demonstrar que, se a e b são números inteiros positivos então $\dfrac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$.

17. Mostre que, se $x^3 + y^3 + z^3 = 81$, $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$, então $xyz \leq 27$.

18. Mostre a desigualdade: $\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}} \geq 2$.

19. Sejam $0 < a < b$, determine a solução da inequação $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a+b-x} < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

20. Mostre que se $ab \geq 0$, então $ab \geq \min.\{a^2,\ b^2\}$.

21. Mostre que, se $a + b = 1$, então: $a^4 + b^4 \geq \dfrac{1}{8}$.

22. Determine todos os valores reais de r para os quais o polinômio: $(r^2-1)x^2 + 2(r-1)x + 1$, seja positivo para todo $x \in \mathbb{R}$.

23. Dados três números positivos, sabe-se que seu produto é 1 e a soma desses três números é maior que a soma dos seus inversos. Mostre que um dos números é maior que 1, enquanto os outros dois são menores que 1.

24. Os lados a, b e c de um triângulo satisfazem a relação $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$. Esse triângulo é equilátero?

25. Mostre que, se $a, b \in \mathbb{R}$ são números tais que $a+b = 1$, então $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2 \geq \dfrac{25}{2}$

26. A receita da venda de q unidades de um produto é $R = 240q$ e o custo de produção de q unidades é $C = 190q + 1500$. Para que haja lucro, a receita de vendas há de ser maior que o custo. Para que valores de q este produto dará lucro?

27. Além do custo administrativo fixo, (diário) de R$350, 00 o custo de produção de q unidades de certo produto é de R$5, 50 por unidade. Durante o mês de março, o custo total da produção variou entre o máximo de R$3.210 e o mínimo de R$1.604 por dia. Determine os níveis de produção máximo e mínimo por mês.

28. Estabeleça para que valores reais de x a área de um círculo de raio x:
    a) é maior que $400\pi\ cm^2$ **b)** não é superior a $400\pi\ cm^2$.

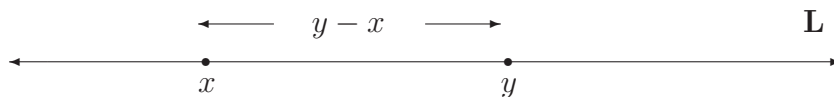
29. Uma piscina infantil deve ter $1\,m$ de altura e o formato de um bloco retangular. O seu comprimento precisa superar à largura em $0,2\,m$. Com quanto de largura essa piscina comportará mais de $2.000.000\,litros$? (Lembrete: $1\,m^3 = 1.000\,litros$).

30. Sabe-se que sobre certas condições o número de bactérias que contém o leite se duplica a cada 3 horas. Calcular o número pelo qual é necessário multiplicar a quantidade de bactérias do inicio, para obter o número de bactérias ao final de 1 dia.

31. Os alunos da UFT, organizaram uma rifa somente para alunos. Dos quais 45 compraram 2 números, e o total de alunos que compraram um número era 20% do número dos rifas vendidas, 80 não compraram número nenhum e outros compraram 3 números. Se o total de rifas vendidas excedeu em 33 ao número de alunos, diga quantos alunos compraram somente um número da rifa.

1.4 Desigualdades

Os números reais podem ser relacionados biunívocamente com os pontos de uma reta **L**. Com esta identificação, dados os números $x,\ y \in \mathbb{R}$ de modo que $x < y$, geometricamente na reta **L**, o ponto x esta à esquerda de y a uma distância $(y - x)$ unidades.

Graficamente.

Definição 1.13.
A escrita de uma proposição matemática que contêm relações do tipo $<$, $>$, $\leq$ *ou* $\geq$ *é chamada "desigualdade"*

1.4.1 Inequação

Uma inequação é uma expressão algébrica que contém as relações $<$, $>$, $\leq$ ou $\geq$.

São exemplos de inequações:

$3x - 4 < 2 + x$	Inequação de primeiro grau
$3x^2 - 4x - 5 \leq 0$	Inequação de segundo grau
$\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} = 2$	Inequação racional
$3x - 4 < 2 + x \leq 3x^2 - 4x$	Inequação mista
$a^x - b^x \leq a - b$	Inequação exponencial
$\text{sen}^2 x - \cos^2 x \geq 1$	Inequação trigonométrica

Resolver uma inequação significa determinar um conjunto de valores que a variável (incógnita) tem que assumir, de modo que, ao substituir na inequação em estudo, a desigualdade seja verdadeira. O conjunto em referência é chamado "*conjunto solução*".

Observação 1.6.

Se tivermos as desigualdades $x < y$ e $y < z$ *detona-se* $x < y < z$.

De igual modo:

a) $x < y \leq z$ significa $x < y$ e $y \leq z$.

b) $x \geq y \geq z$ significa $x \geq y$ e $y \geq z$.

c) $x \geq y > z$ significa $x \geq y$ e $y > z$.

d) $x \geq y \leq z$ não tem significado, é melhor escrever $y \leq z$ e $y \leq x$, não havendo relação entre x e z.

1.4.2 Intervalos

Sejam a e b números reais tais que $a \leq b$. São chamados de intervalos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$.

$(a,\ b) = \{\ x \in \mathbb{R}\ /.\quad a < x < b\}$ intervalo aberto de extremos a e b, isto é, o conjunto de números reais compreendidos estritamente entre a e b.

$[a,\ b] = \{\ x \in \mathbb{R}\ /.\quad a \leq x \leq b\}$ intervalo fechado de extremos a e b, isto é, o conjunto de números reais compreendidos entre a e b (incluindo os pontos a e b).

$(a,\ b] = \{\ x \in \mathbb{R}\ /.\quad a < x \leq b\}$ intervalo semi-aberto pela esquerda de extremos a e b isto é, o conjunto de números reais compreendidos entre a e b (incluindo o ponto b).

$[a,\ b) = \{\ x \in \mathbb{R}\ /.\quad a \leq x < b\}$ intervalo semi-aberto pela direita de extremos a e b, isto é o conjunto de números reais compreendidos entre a e b (incluindo o ponto a).

Logo, um subconjunto I de $\mathbb{R}$ é um intervalo se, e somente se, a seguinte cumpre a seguinte propriedade:

Propriedade 1.10. .

Seja I um intervalo em $\mathbb{R}$, para quaisquer $x,\ y \in I$ com $x < y$ e para qualquer $z \in \mathbb{R}$ com $x < z < y$, temos $z \in I$.

A demonstração é exercício para o leitor.

1.4.3 A reta ampliada. Intervalos infinitos

Reta ampliada é o conjunto numérico $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,\ +\infty\}$, onde $-\infty$ (menos infinito) e $+\infty$ (mais infinito) são símbolos que se comportam segundo as seguintes convenções.

1. $-\infty < x < +\infty \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

2. $x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = (\pm\infty)$

3. $x.(\pm\infty) = (\pm\infty).x = (\pm\infty) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

4. $(\pm\infty) + (\pm\infty) = (\pm\infty) \quad x > 0.$

5. $x.(\pm\infty) = (\pm\infty).x = (\mp\infty) \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad x < 0.$

Os intervalos infinitos são definidos como:

$(a,\ +\infty) = \{\ x \in \mathbb{R}\ /.\quad a < x\ \}$ $\qquad [a,\ +\infty) = \{\ x \in \mathbb{R}\ /.\quad a \leq x\ \}$

$(-\infty,\ b) = \{\ x \in \mathbb{R}\ /.\quad x < b\ \}$ $\qquad (-\infty,\ b] = \{\ x \in \mathbb{R}\ /.\quad x \leq b\ \}$

Os símbolos -∞, $+\infty$ e ∞ somente são ideias de "*números*" porém não se comportam como números.

Exemplo 1.25.

Dados os intervalos $A = [3,\ 5],\ B = (4,\ 7]$ e $C = [8,\ 10]$ *então:*

a) $A \cup C = [3,\ 5] \cup [8,\ 10]$ **b)** $A \cup B = [3,\ 7]$

c) $A \cap C = \emptyset$ **d)** $A \cap B = (4,\ 5]$

Observamos que a união ou interseção de dois intervalos nem sempre é um intervalo.

Exemplo 1.26.

Seja $x \in (1,\ 2]$ *, mostre que* $x^2 - 2x \in (-1,\ 0]$.

Solução.

Da hipótese $x \in (1,\ 2]$ temos que $1 < x \leq 2$, então $0 < x - 1 \leq 1$.

Logo pela propriedade para números reais positivos $0 < (x-1)^2 \leq 1$, assim $-1 < (x-1)^2 - 1 \leq 0$, isto é $-1 < x^2 - 2x \leq 0$.

Portanto, $x^2 - 2x \in (-1,\ 0]$.

Exemplo 1.27.

Se $x \in (0,\ 2)$*, determine números* m *e* M *de modo que:* $m < \dfrac{x+2}{x+5} < M$.

Solução.

Se $x \in (0,\ 2)$, então $0 < x < 2$, logo $5 < x + 5 < 7$.

Da propriedade do inverso de números reais temos:

$$\frac{1}{7} < \frac{1}{x+5} < \frac{1}{5} \tag{1.5}$$

Por outro lado, de $x \in (0,\ 2)$ segue que:

$$2 < x + 2 < 4 \tag{1.6}$$

De (1.5) e (1.6) temos pela propriedade de monotonia para o produto que:

$$\frac{2}{7} < \frac{x+2}{x+5} < \frac{4}{5}$$

Portanto, $m = \dfrac{2}{7}$ e $M = \dfrac{4}{5}$ (estes não são os únicos números).

Exemplo 1.28.

Determinar em termos de intervalos o conjunto solução da inequação: $3x - 4 < 2 + x$.

Solução.

Temos que $3x - 4 < 2 + x$, então $2x < 6$; logo $x < 3$.

Portanto, o conjunto solução é o intervalo $(-\infty,\ 3)$.

Exemplo 1.29.

Resolver a inequação $x^2 - 4 < x + 2$.

Solução.

1^o **Método.**

$x^2 - 4 < x + 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 6 < 0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)(x-3) < 0$

$\Rightarrow \quad \{x + 2 > 0 \quad \text{e} \quad x - 3 < 0\} \quad \text{ou} \quad \{x + 2 < 0 \quad \text{e} \quad x - 3 > 0\}$

$\Rightarrow \quad \{x > -2 \quad \text{e} \quad x < 3\} \quad \text{ou} \quad \{x < -2 \quad \text{e} \quad x > 3\}$

$\Rightarrow \quad x \in (-2,\ 3) \quad \text{ou} \quad x \in \emptyset \quad \Rightarrow \quad x \in (-2,\ 3)$

Portanto, o conjunto solução da inequação é $(-2,\ 3)$

2^o **Método.**Completando quadrados.

$x^2 - 4 < x + 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x < 6 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x + \dfrac{1}{4} < 6 + \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow \quad (x - \dfrac{1}{2})^2 < \dfrac{25}{4} \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{5}{2} < x - \dfrac{1}{2} < \dfrac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad -2 < x < 3 \quad \Rightarrow \quad x \in (-2,\ 3)$

Portanto, o conjunto solução da inequação é $(-2,\ 3)$

3^o **Método.** *Método dos pontos críticos.*

$x^2 - 4 < x + 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 6 < 0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)(x-3) < 0.$

Os valores de x para os quais verifica-se a igualdade $(x+2)(x-3) = 0$, são $x = -2$ e $x = 3$.

+ + + + + + + − − − − − − − − + + + + + + +
$-\infty$ -2 3 $+\infty$

No diagrama, observamos que $(x+2)(x-3) < 0 \quad \text{se} \quad x \in (-2,\ 3)$

Portanto, o conjunto solução da inequação é $(-2,\ 3)$.

Observação 1.7.

1) *Para determinar o sinal do fator $x - a$, considere:*

Se, o sinal de $(x - a)$ é positivo, então $(x - a) > 0 \quad e \quad x > a$, logo x esta à direita de a.

Se, o sinal de $(x - a)$ é negativo, então $(x - a) < 0 \quad e \quad x < a$, logo x esta à esquerda de a.

2) *O método dos pontos críticos consiste em transformar a inequação dada $E(x) < 0$ em outra equivalente $E_1(x)$ da forma $E_1(x) > 0$ ou $E_1(x) \geq 0$ ou $E_1(x) \leq 0$.*

3) *Para determinar o sinal de um produto, considere: $(+)(+) = +$, $(+)(-) = -$, $(-)(+) = -$ e $(-)(-) = +$.*

Logo, devemos determinar os pontos críticos de $E_1(x)$; isto é, os valores do numerador e denominador de $E_1(x)$ os quais sejam iguais a zero, para assim determinar na reta real $\mathbb{R}$ os intervalos respectivos.

Por último, temos que determinar o sinal de $E_1(x)$ em cada um dos intervalos que cumprem a inequação.

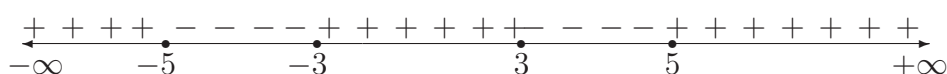
O comportamento dos sinais em uma inequação provém do gráfico de funções polinomiais num sistema de coordenadas cartesianas. Este tópico será tratado posteriormente.

Exemplo 1.30.

Determine o conjunto solução da inequação $\dfrac{x^2-9}{25-x^2} \geq 0.$

Solução.

Temos que $\dfrac{x^2-9}{25-x^2} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{(5-x)(5+x)} \geq 0$ se, e somente se $\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-5)(x+5)} \leq 0$, são pontos críticos: $\{\,-5,\ -3,\ 3,\ 5\,\}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} + + + + & & - - - - - & & + + + + + + & & - - - - & & + + + + + + + \\ -\infty & -5 & & -3 & & 3 & & 5 & & & +\infty \end{array}$$

Logo, o conjunto solução é o intervalo semi-aberto $(-5,\ -3] \cup [3,\ 5)$

As inequações do próximo exemplo devem ser estudadas com muita atenção, uma vez que são frequentes os equívocos nas soluções por parte dos estudantes na fase inicial do estudo do cálculo.

Exemplo 1.31.

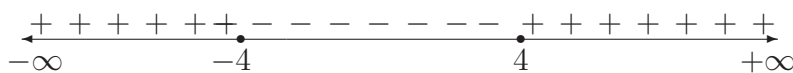
Resolver as seguintes inequações:

a) $x^2 < 16$ **b)** $x^2 < -9$

c) $x^3 < 27$ **d)** $(x+1)^4 < (x+1)^2$

Solução. **(a)**

Da inequação $E(x)\ :\ x^2 < 16$ temos a inequação $E_1(x)\ :\ x^2 - 16 < 0$, então na forma de fatores resulta $(x-4)(x+4) < 0$.

$$\begin{array}{ccccc} + + + + + + + & & - - - - - - - - & & + + + + + + + \\ -\infty & -4 & & 4 & +\infty \end{array}$$

Considere o seguinte quadro:

Intervalos	Sinal de $E_1(x)$	Conjunto solução de $E_1(x)$
$(-\infty,\ -4)$	$+$	
$(-4,\ 4)$	$-$	$(-4,\ 4)$
$(4,\ +\infty)$	$+$	

Portanto, conjunto solução da inequação é $(-4,\ 4)$. □

Solução. **(b)**

Da inequação $x^2 < -9$, temos $x^2 + 9 < 0$, isto é absurdo, a soma de números positivos sempre é positivo; logo não existem números reais que cumpram a inequação.

Portanto a solução é o conjunto vazio. □

Solução. **(c)**

Considere a inequação $E_2(x) \,:\, x^3 < 27$.

Temos $x^3 - 3^3 < 0$, isto é $(x-3)(x^2+3x+9) < 0$. Observe que $x^2 + 3x + 9 = x^2 + 2\cdot\dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{4} + 9 - \dfrac{9}{4} = (x + \dfrac{3}{2})^2 + \dfrac{27}{4} > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, então $x^2 + 3x + 9 > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Logo, na inequação $(x-3)(x^2+3x+9) < 0$ segue que $x - 3 < 0$; isto é $x < 3$.

Portanto, o conjunto solução é o intervalo $(-\infty,\ 3)$ □

Solução. **(d)**

Temos aqui a inequação $E(x) \,:\, (x+1)^4 < (x+1)^2$.

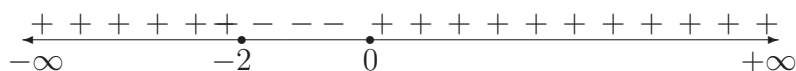
$(x+1)^4 < (x+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^4 - (x+1)^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2.[(x+1)^2 - 1] < 0$

$(x+1)^2(x^2+2x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x+1)^2(x+2) < 0$

Sendo $(x+1)^2 \geq 0$ para todo número real, a inequação $E(x)$ transformou-se na inequação $E_1(x) \,:\, x(x+2) < 0$.

Seus pontos críticos são -2 e 0.

+ + + + + + − − − + + + + + + + + + + + +

$-\infty$ -2 0 $+\infty$

Observe o seguinte quadro:

Intervalos	Sinal de $E_1(x)$	Conjunto solução de $E_1(x)$
$(-\infty,\ -2)$	$+$	
$(-2,\ 0) - \{-1\}$	$-$	$(-2,\ 0)$
$(0,\ +\infty)$	$+$	

Propriedade 1.11.

Para todo $x \in \mathbb{R}$ e $a > 0$ temos: $ax^2 + bx + c \geq 0$ se, e somente se $b^2 \leq 4ac$.

Demonstração.

Dividindo na inequação $ax^2 + bx + c \geq 0$ por $a > 0$ resulta: $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} \geq 0$. Completando quadrados

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2 \geq (\frac{b}{2a})^2 \quad \Rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

A desigualdade vale para todo $x \in \mathbb{R}$, em particular para $x = -\dfrac{b}{2a}$, assim

$$0^2 \geq \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \Rightarrow \quad 0 \geq b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad b^2 \leq 4ac$$

A demonstração da recíproca é exercício para o leitor.

Exemplo 1.32.

Resolver as inequações: **a)** $8x - x^2 - 20 \leq 0$ **b)**$x^2 + x + 9 > 0$
c) $x^6 - 1 \leq 0$ **d)**$x^p - 1 > 0$, *onde* p *é primo*

Solução. ***(a)***

Temos $0 \leq x^2 - 8x + 20$, como $(-8)^2 \leq 4(1)(20)$, segue pela Propriedade 1.5, a solução é o conjunto de todos os números reais. □

Solução. **(b)**

Da inequação $x^2 + x + 9 > 0$, segue que $(1)^2 \leq 4(1)(9)$, então, pela *Propriedade* (1.5), a solução é o conjunto de todos os números reais. □

Solução. **(c)**

A inequação $x^6 - 1 \leq 0$ podemos escrever sob a forma $(x^2)^3 - 1^3 \leq 0$ então, da diferença de cubos temos $(x^2 - 1^2)[(x^2)^2 + x^2 + 1] \leq 0$ isto é $(x+1)(x-1)(x^4 + x^2 + 1) \leq 0$; pela *Propriedade* (1.11) segue que $(x^4 + x^2 + 1) \geq 0$, logo a inequação original se reduz a calcular $(x + 1)(x - 1) \leq 0$ que tem como solução o intervalo $[-1, 1]$.

Portanto o conjunto a solução de $x^6 - 1 \leq 0$ é o intervalo $[-1, 1]$. □

Solução. **(d)**

A inequação $x^p - 1 > 0$ onde p é primo, podermos escrever na forma de fatores como $(x-1)(x^{p-1} + x^{p-2} + x^{p-3} + \cdots + x^2 + x + 1) > 0$, o fator $(x^{p-1} + x^{p-2} + x^{p-3} + \cdots + x^2 + x + 1$ sempre é positivo $\forall x \in \mathbb{R}$ pois é um polinômio irredutível de grau par (todas suas raízes são números não reais).

Então, resolver nossa desigualdade original reduz-se a resolver $(x-1) > 0$, cuja solução é $x \in (1, +\infty)$

Portanto, a solução de $x^p - 1 > 0$, onde p é primo é o conjunto $(1, +\infty)$.

Exemplo 1.33.

Resolver em $\mathbb{R}$ *o seguinte:* **a)** $x^2 + 6x + 10 = 0$ **b)** $x^2 + 6x + 10 \geq 0$
c) $x^2 + 6x + 10 < 0$ **d)** $x^2 + 10 \geq 0$

Solução. **(a)**

Como resultado da *Propriedade* (1.7) (fórmula de Bhaskara), segue que $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2}$ e, como não é número real, então o problema não tem solução em $\mathbb{R}$; isto é $x \notin \mathbb{R}$.

Solução. **(b)**

Pela *Propriedade* (1.11) temos que $6^2 \leq 4(10)$, logo o problema tem solução em $\mathbb{R}$; isto é $\forall\, x \in \mathbb{R}$ temos que $x^2 + 6x + 10 \geq 0$

Solução. **(c)**

Como resultado da *Propriedade* (1.11) temos que $6^2 \leq 4(10)$, logo $x^2 + 6x + 10 \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, assim, nunca poderá ocorrer que $x^2 + 6x + 10 < 0$.

Logo, a desigualdade em estudo não tem solução em $\mathbb{R}$. □

Solução. **(d)**

A solução de $x^2 + 10 \geq 0$ é imediata, não precisa da Propriedade 1.7, pois $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, então $x^2 + 10 \geq 10 \geq 0$, isto é $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 10 \geq 0$.

Portanto, o conjunto solução da inequação $x^2 + 10 \geq 0$ são todos os números reais.

Aplicações das desigualdades

Exemplo 1.34.

Um terreno deve ser lotado. Os lotes, todos retangulares, devem ter área superior ou igual que $1.500\, m^2$*, e a largura de cada um deve ter* $20\, m$ *a menos que o comprimento. Determine as dimensões do menor dos lotes que cumprem tais condições.*

Solução.

Suponhamos que o comprimento de cada lote seja x metros, então a largura mede $(x - 20)$ metros; logo sua área mede $x(x - 20)m^2$. Por outro lado, tem que ser superior ou igual a $1.500m^2$; assim $x(x-20) \geq 1.500$ onde $x^2 - 20x - 1.500 \geq 0$, isto é $(x-50)(x+30) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 50$ ou $x \leq -30$.

Desconsiderando $x \leq -30$, temos que as medidas do menor dos lotes é: comprimento $50\, m$ e largura $30\, m$. □

Exemplo 1.35.

Uma galeria vai organizar uma exposição e fez duas exigências: ***i)*** *a área de cada quadro deve ser no mínimo de* $2.800\, cm^2$*;* ***ii)*** *os quadros devem ser retangulares e a altura deve ter* $30\, cm$ *a mais que a largura.*

Dentro dessas especificações, em que intervalo de números reais devem se situar as larguras dos quadros?

Solução.

Da segunda condição, suponha a largura do quadro seja $x\, cm$, então sua altura mede $(30 + x)cm$ e sua área mede $(30 + x)xcm^2$; pela primeira condição $2.800 \leq (30 + x)x$, onde $0 \leq x^2 + 30x - 2.800 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq (x + 70)(x - 40) \quad \Rightarrow \quad (x \leq -70$ ou $x \geq 40)$. Desconsideramos $x \leq -70$.

Portanto, as medidas do quadro são: largura $40\, cm$ e altura $70\, cm$.

Exercícios 1-3

1. Expresse cada um dos intervalos abaixo usando outra notação adequada (duplas desigualdades por exemplo)

1. $(1,\ 14)$	**2**. $(4,\ 7)$	**3**. $[-\pi,\ \pi]$	**4**. $[-\dfrac{5}{3},\ 8]$
5. $[-10,\ -2]$	**6**. $(0,\ 4)$	**7**. $[-3\pi,\ \pi)$	**8**. $(-16,\ 16]$

2. São dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \quad x \text{ é impar } \}$, $\quad B = \{x \in \mathbb{Z}/. \quad -3 \leq x < 4\}$ e $C = \{\ x \in \mathbb{N}\ /. \quad x < 6\ \}$. Prove que o conjunto D, tal que $D = (A \cap B) - C$, é vazio.

3. Resolver as seguintes equações:

1. $3x + 2 = 4 - x$	**2**. $x^2 - 2x - 3 = 0$	**3**. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
4. $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$	**5**. $5x^2 - 3x - 4 = 0$	**6**. $x^4 - x^2 + 20 = 0$

4. Determine o conjunto solução em $\mathbb{R}$ para cada uma das seguintes desigualdades:

1. $x^2 \geq 1$	**2**. $x^3 \geq x^2$	**3**. $2x - 7 < 5 - x$
4. $2(x-4) + 3x < 5x - 7$	**5**. $3 - x < 5 + 3x$	**6**. $2 > -3 - 3x \geq -1$
7. $4x - 3(x+5) < x - 18$	**8**. $x^2 - 4 < x + 2$	**9**. $\sqrt{x^2 + x - 2} < 4$
10. $2x - 6 < \dfrac{3x+8}{5}$	**11**. $\dfrac{2x+6}{3} - \dfrac{x}{4} < 5$	**12**. $\dfrac{x^2 + 4x + 10}{x^2 - x - 12} > 0$
13. $x^2 + 3x + 8 < \dfrac{2x - 74}{x - 7}$	**14**. $\dfrac{x+4}{x-2} < \dfrac{x}{x+1}$	**15**. $(x+1)^4 \leq (x+1)^2$

16. $7(3-2x) + 2(2x-15) < 6(3x-5) + 3(3x-1)$ **17**. $\dfrac{3}{2x-3} > 3x - 16$

5. Resolver as seguintes inequações:

1. $(x - \dfrac{1}{2})(3x+5) > 0$	**2**. $(x-2)(x+2) \leq 0$	**3**. $x(x+1) \leq 0$
4. $(x-1)(x+1) \leq 0$	**5**. $\dfrac{x-1}{x} \geq 0$	**6**. $\dfrac{x+1}{x-1} < 0$
7. $x < x^2 - 12 < 4x$	**8**. $3 - x < 5 + 3x$	**9**. $\sqrt{x^2 + x - 2} \geq 4$
10. $(x-5)^2 < (2x-3)^2$	**11**. $x^2 + 3x > -2$	**12**. $3x - 4 < 2 + x$

13. $(x-1)^3(x^2-4)(x-5) > 0$ **14**. $2 \leq 5-3x < 11$ **15**. $x^2-3x+2 > 0$

16. $5x-4(x+5) < x-24$ **17**. $3x-5 < \frac{3}{4} + \frac{1-x}{3}$ **18**. $3-x < 5+3x$

19. $x^5-2x^4-15x^3 > 0$ **20**. $2x^2-x-10 > 0$ **21**. $x^2-3x+2 > 0$

22. $x^2+8x-65 < x-18$ **23**. $x^2+\frac{3}{5}x+\frac{9}{100} < 0$ **24**. $x^2-2x-5 > 0$

25. $3(x+4)+4x < 7x+2$ **26**. $3x^2-7x+6 < 0$ **27**. $x^2-2x-8 < 0$

28. $(x^5-1)(x+1) \geq 0$ **29**. $x^2+20x+100 > 0$ **30**. $3x-4 < x+6$

31. $(x^3-5x^2+7x-3)(2-x) \geq 0$ **32.** $(x^2-3)^3(x^2-7)(x^2-2x-3) > 0$

6. Determine o conjunto solução das seguintes inequações:

1. $\frac{x}{a^2-b^2} + \frac{3x}{a+b} < \frac{5}{a-b}$ se $a > b > 0$

2. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} > 1 + \frac{x}{c}$ se $c > b > a > 0$

3. $\frac{2x}{3a} + 4 > \frac{5x}{6b} + 2x$ se $b > a > 0$

4. $11(2x-3)-3(4x-5) > 5(4x-5)$

7. Resolver as seguintes inequações racionais:

1. $\frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x} < \frac{2x}{x+1}$ **2**. $\frac{2}{2x+3} < 0$ **3**. $\frac{3x+5}{2x+1} \leq 3$

4. $(2x+1)^{101}(x-3)^{99} \geq 0$ **5**. $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3}$ **6**. $\frac{3x^2+12}{x^2+4x-5} > 3$

7. $\frac{(1-x-x^2)(2-x-x^2)}{(3-x)(2-x)} \geq 0$ **8**. $\frac{x^5-1}{x^4+1} < \frac{x^5-2}{x^4+2}$ **9**. $\frac{x+4}{x-7} > \frac{x}{x+1}$

8. Mostre que se x e y não são ambos iguais a zero, então $4x^2+6xy+4y^2 > 0$ e $3x^2+5xy+3y^2 > 0$.

9. Determinar para quais valores de $x \in \mathbb{R}$ verifica a desigualdade

$$3(x-a)a^2 < x^3-a^3 < 3(x-a)x^2$$

10. Determine o valor de: $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n}$, se $n \to \infty$

11. Suponha $b^2-4c \geq 0$. Mostre que os números $\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$ e $\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$ ambos cumprem a equação: $x^2+bx+c = 0$.

12. Suponha que $b^2 - 4c < 0$. Mostre que não existe nenhum número real que cumpre a equação: $x^2 + bx + c = 0$.

13. Suponha a, b, c e d números reais. Mostre a desigualdade de Schwartz: $ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{c^2 + d^2}$.

14. Mostre que: $\sqrt{x^2 - 2x - 15} \geq x + 1 \quad \forall\, x \in (-\infty,\ -3]$.

15. Mostre que: $\dfrac{1}{4} \leq x^2 + x + 2 \leq 8 \quad \forall\, x \in [-1,\ 2] - \{1\}$.

16. Os números positivos $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$ não são iguais a zero e formam uma progressão aritmética. Mostre que:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$$

17. Determine a quantidade de números inteiros, positivos e ímpares, formados por três algarismos distintos, escolhidos dentre os algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9.

18. Calcule a soma de todas as frações irredutíveis, da forma $\dfrac{p}{72}$, que pertençam ao intervalo $[4, 7]$.

19. Dentre os paralelepípedos com soma fixa de suas três arestas simultaneamente perpendiculares, achar o paralelepípedo de volume máximo.

20. Três pessoas A, B e C visitam o açude "*Peixe na chapa*" e pescam mais de 8 peixes; B pensa pescar mais 4 com o que teria mais peixes que A e C porém B tem menos peixes que C e o que tem C não chegam a 5. Quantos peixes tem cada um deles?

21. Para uma festa no Natal, uma creche necessitava de 120 brinquedos. Recebeu uma doação de R\$ 370,00. Esperava-se comprar carrinhos a R\$$2,00$ cada, bonecas a R\$$3,00$ e bolas a R\$$3,50$. Se o número de bolas deveria ser igual ao número de bonecas e carrinhos juntos. Mostre que a solução seria comprar: 40 bonecas, 20 carrinhos e 60 bolas.

22. Em uma fazenda, existia um número de cabeças de gados. Depois de duplicar esse número, foi roubado 1 cabeça, sobrando mais de 54. Meses depois observou-se que triplicou o número de cabeças de gado que existia no início e foram roubadas 5 restando menos de 80. Quantas cabeças de gado existiam no início?

23. A média aritmética das idades de um grupo de médicos e advogados é 40 anos. A média aritmética das idades dos médicos é 35 anos e a dos advogados é 50 anos. Pode-se, então, afirmar que:

24. Uma pessoa compra um apartamento por R\$10.000, 00, em seguida o aluga. Deixando $12\frac{1}{2}\%$ da renda anual para reparações e manutenção, pagando R\$325, 00 de IPTU e $5\frac{1}{2}\%$ descontando por conta de investimento. Qual é a renda mensal?

25. A soma das idades de três pessoas é 96. A maior tem 32 anos mais que a menor e a do meio 16 anos menos que a maior. Calcular a idade de cada uma das pessoas.

26. Eu tenho a idade que você tinha, quando eu tinha a metade da idade que você tem. A soma de nossas idades hoje é igual a 35 anos. Quais são as idades hoje?

27. Mostre que, para números reais x e y, e $n \in \mathbb{N}$ $\ n \geq 2$ são válidas as seguintes igualdades:

    1. $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1})$

    2. $x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots + (-1)^{n-3}x^2y^{n-3} - xy^{n-2} + y^{n-1})$ somente quando n ímpar.

28. Mostre que, se p é número primo, e $a \in \mathbb{N}$, então $a^p - a$ é múltiplo de p.

29. Prove que: $(1-x)[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})] = 1 - x^{2^{(n+1)}}$ para qualquer inteiro x, e todo $n \geq 0$.

30. Determine o valor de $E = x^3 + 3x + 2$, quando $x = \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}}$.

31. Construir números 49, 4.489, 444.889, 44.448.889, ... etc obtendo cada um deles inserindo o número 48 no meio do número anterior. Verificar que estes números são quadrados perfeitos e encontrar a raiz quadrada do número que consiste de $2n$ algarismos.

32. Dada a equação de raízes x_1 e x_2 : $(m^2 - 5m + 6)x^2 + (4 - m^2)x + 20 = 0$. Determine os valores do parâmetro m tal que $x_1 < 1 < x_2$.

1.5 Valor absoluto

Definição 1.14.
O valor absoluto de um número real x é denotado por $\mid x \mid$, é o próprio número x se for positivo ou igual a zero, e é igual a seu oposto aditivo $-x$ se for negativo.

Isto é:

$$\mid x \mid = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Por exemplo, $\mid 3 \mid = 3, \quad \mid 0 \mid = 0, \quad \mid -4 \mid = -(-4) = 4$

Propriedade 1.12.

1. $\mid a \mid \geq 0, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$ e $\mid a \mid = 0$ se $a = 0$.

2. $\mid a \mid^2 = a^2$

3. $\mid -a \mid = \mid a \mid$

4. $\mid ab \mid = \mid a \mid . \mid b \mid$

5. $\mid a + b \mid \leq \mid a \mid + \mid b \mid$ . . . Desigualdade triangular

Demonstração. (2)
Suponha $a \geq 0$, então $\mid a \mid = a$, logo $\mid a \mid^2 = a.a = a^2$.
Suponha $a < 0$, então $\mid a \mid = -a$, logo $\mid a \mid^2 = (-a)(-a) = a^2$.

Demonstração. (5)
Do fato ser o valor absoluto de um número real sempre positivo, segue que:

$$ab \leq \mid a \mid . \mid b \mid \tag{1.7}$$

Pela 2^a parte desta propriedade e de (1.7) temos que $\mid a+b \mid^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \mid a \mid^2 + 2ab + \mid b \mid^2 \leq \mid a \mid^2 + 2 \mid ab \mid + \mid b \mid^2 = (\mid a \mid + \mid b \mid)^2$, isto é $\mid a + b \mid^2 \leq (\mid a \mid + \mid b \mid)^2$ sendo todos este últimos números positivos concluímos que $\mid a + b \mid \leq \mid a \mid + \mid b \mid$.

Observação 1.8.

i) *A distância entre os números reais a e b da reta numérica denotamos por $\mid b - a \mid$.*

ii) *Geometricamente, $\mid a \mid$ é a distância na reta numérica do número a até o ponto zero.*

Graficamente.

$\mid b-a \mid = \mid a-b \mid$ (a, b) $\mid a \mid$ (0, a)

Propriedade 1.13.

i) *Se* $b > 0$ *e* $\mid b \mid = a$, *então* $a = b$ *ou* $a = -b$.

ii) $\mid a \mid = \mid b \mid$, *então* $a = b$ *ou* $a = -b$.

iii) $\sqrt{a^2} = \mid a \mid$ *onde* $\sqrt{a^2}$ *é a raiz quadrada positiva de* a^2.

iv) $\mid \dfrac{a}{b} \mid = \dfrac{\mid a \mid}{\mid b \mid}$ *se* $b \neq 0$

Demonstração. (ii)

Da hipótese $\mid a \mid = \mid b \mid$ e da definição de valor absoluto do número b, segue que $\mid a \mid = b$ ou $\mid a \mid = -b$. De modo análogo, da definição de valor absoluto para o número a segue de $\mid a \mid = b$ que, $a = b$ ou $-a = b$; e de $\mid a \mid = -b$ segue que $a = -b$ ou $-a = -b$.

Portanto $a = b$ ou $a = -b$. □

Propriedade 1.14.

i) $\mid x \mid < b$ *se, e somente se* $-b < x < b$.

ii) $\mid x \mid \leq b$ *se, e somente se* $-b \leq x \leq b$.

iii) *Se* $b \geq 0$, $\mid x \mid > b$ *se, e somente se* $x > b$ *ou* $x < -b$.

iv) *Se* $b \geq 0$, $\mid x \mid \geq b$ *se, e somente se* $x \geq b$ *ou* $x \leq -b$

v) $\mid\mid a \mid - \mid a \mid\mid \leq \mid a-b \mid \leq \mid a \mid + \mid b \mid$

A demonstração desta propriedade é exercício para o leitor.

Exemplo 1.36.

Resolver as seguintes equações:

a) $\mid 2x-4 \mid = 6$ **b)** $\mid\mid 5-2x \mid -4 \mid = 8$ **c)** $\left|\dfrac{3x+1}{x-1}\right| = 4$

d) $\mid x^2-4 \mid = \mid 2x \mid$ **e)** $\mid x-1 \mid + 4\mid x-3 \mid = 2\mid x+2 \mid$

Solução. (a)

Da definição, de $| \; 2x - 4 \; |= 6$ segue-se que $2x - 4 = 6$ ou $-(2x - 4) = 6$, então $x = \dfrac{6+4}{2}$ ou $x = \dfrac{6-4}{-2}$. Portanto, $x = 5$ ou $x = -1$. □

Solução. (b)

Pela definição de valor absoluto, segue que $| \; 5 - 2x \; | -4 = 8$ ou $| \; 5 - 2x \; | -4 = -8$, então $5 - 2x = 12$ ou $5 - 2x = -12$ ou $| \; 5 - 2x \; |= -4$, sendo esta última um absurdo.

Logo, de $5 - 2x = 12$ obtemos $x = -\dfrac{7}{2}$, e de $5 - 2x = -12$ obtemos $x = \dfrac{17}{2}$.

Portanto $x = -\dfrac{7}{2}$ ou $x = \dfrac{17}{2}$ é solução do problema. □

Solução. (e)

Da equação $| \; x - 1 \; | + 4| \; x - 3 \; | = 2| \; x + 2 \; |$ temos o seguinte diagrama:

Se $x < -2$ então, $| \; x + 2 \; |= -(x + 2)$, $| \; x - 1 \; |= -(x - 1)$ e $| \; x - 3 \; |= -(x - 3)$, logo a equação é equivalente a $-(x - 1) - 4(x - 3) = -2(x + 2)$ onde $x = \dfrac{17}{3}$ e, como $x = \dfrac{17}{3}$ não pertence ao intervalo da condição, segue que $x \notin \mathbb{R}$.

Se $-2 \leq x < 1$ então $| \; x + 2 \; |= x + 2$, $| \; x - 1 \; |= -(x - 1)$ e $| \; x - 3 \; |= -(x - 3)$, logo a equação é equivalente a $-(x - 1) - 4(x - 3) = 2(x + 2)$ onde $x = \dfrac{9}{7}$ e, pela condição $x \notin \mathbb{R}$.

Se $1 \leq x < 3$ então $| \; x + 2 \; |= x + 2$, $| \; x - 1 \; |= x - 1$ e $| \; x - 3 \; |= -(x - 3)$, logo a equação é equivalente a $x - 1 - 4(x - 3) = 2(x + 2)$ onde $x = \dfrac{7}{5}$.

Se $x \geq 3$, então $| \; x + 2 \; |= x + 2$, $| \; x - 1 \; |= x - 1$ e $| \; x - 3 \; |= x - 3$, logo a equação é equivalente a $x - 1 + 4(x - 3) = 2(x + 2)$ onde $x = \dfrac{17}{3}$.

Portanto, $x = \dfrac{7}{5}$, e $x = \dfrac{17}{3}$ são soluções da equação.

Exemplo 1.37.

Dados: $A = \{ x \in \mathbb{R} /. \quad | \; 12x - 4 \; |< 10 \}$, $\quad B = \{ x \in \mathbb{R} /. \quad | \; 3x - 1 \; |\geq 1 \}$ *e* $C = \{ x \in \mathbb{R} /. \quad | \; x^2 - 4 \; |< 2 \}$. *Expressar na forma de intervalos o conjunto* $(A \cup B) \cap C$.

Solução.

Para o conjunto A temos que $| \; 12x - 4 \; |< 10$, então $-10 < 12x - 4 < 10$ logo -$\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{14}{12}$; isto é $A = (-\dfrac{1}{2}, \dfrac{14}{12})$.

Para o conjunto B temos que $| \; 3x - 1 \; |\geq 1$ implica $3x - 1 \geq 1$ ou $3x - 1 \leq -1$, logo $x \geq \dfrac{2}{3}$ ou $x \leq 0$, isto é $B = (-\infty, 0] \cup [\dfrac{2}{3}, +\infty)$.

Para o conjunto C temos $-2 < x^2 - 4 < 2$, então $2 < x^2 < 6$, logo $-\sqrt{6} < x < -\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2} < x < \sqrt{6}$; assim $C = (-\sqrt{6}, -\sqrt{2}) \bigcup (\sqrt{2}, \sqrt{6})$

Portanto, $(A \cup B) \cap C = (-\sqrt{6},\ -\sqrt{2}) \bigcup (\sqrt{2},\ \sqrt{6})$ é solução do problema.

Exemplo 1.38.

Resolver $\mid x^2 - 4 \mid + \mid 2x - 5 \mid < 1$.

Solução..

Temos que $\mid x^2 - 4 \mid = x^2 - 4$ se $2 \leq x$ ou se $x \leq -2$ e $\mid 2x - 5 \mid = 2x - 5$ se $\dfrac{5}{2} \leq x$. Logo:

Se $x \leq -2$ vem que $\mid x^2 - 4 \mid = x^2 - 4$ e $\mid 2x - 5 \mid = -(2x - 5) \Rightarrow (x^2 - 4) - (2x - 5) < 1$ onde $x^2 - 2x < 0$ isto é $(x - 0)(x - 2) < 0$, e pela condição $x \notin \mathbb{R}$.

Se $-2 < x < 2$ temos que $\mid x^2 - 4 \mid = -(x^2 - 4)$ e $\mid 2x - 5 \mid = -(2x - 5)$ então a inequação é equivalente à $-(x^2 - 4) - (2x - 5) < 1$ onde $0 < x^2 + 2x - 8$ isto é $0 < (x + 4)(x - 2)$ e da condição $x \notin \mathbb{R}$.

Se $2 \leq x < \dfrac{5}{2}$ temos que $\mid x^2 - 4 \mid = x^2 - 4$ e $\mid 2x - 5 \mid = -(2x - 5)$ então $(x^2 - 4) - (2x - 5) < 1$ onde $(x - 0)(x - 2) < 0$ e pela condição $x \notin \mathbb{R}$.

Se $\dfrac{5}{2} \leq x$ temos que $\mid x^2 - 4 \mid = x^2 - 4$ e $\mid 2x - 5 \mid = (2x - 5)$ então $(x^2 - 4) + (2x - 5) < 1$ onde $x^2 + 2x - 10 < 0$, isto é $(x - \sqrt{11} + 1)(x + \sqrt{11} + 1) < 0$, pela condição $x \notin \mathbb{R}$.

Portanto, não existe solução em $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.39.

Resolver $(x - 1)^2 - \mid x - 1 \mid + 8 > 0$.

Solução.

Do fato $(x - 1)^2 = \mid x - 1 \mid^2$, segue que $\mid x - 1 \mid^2 - \mid x - 1 \mid + 8 > 0$, logo completando quadrados $\mid x - 1 \mid^2 - 2(\dfrac{1}{2}) \mid x - 1 \mid + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} + 8 > 0$, assim $(\mid x - 1 \mid - \dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{31}{4} > 0$.

Observe que esta desigualdade vale para todo número real.

Portanto, $x \in \mathbb{R}$ é a solução.

Observação 1.9.

a) *O máximo de dois números* a *e* b *denotamos* $\max\{a,\ b\}$ *e o mínimo de* $\min\{a,\ b\}$.

Por exemplo $\max\{-1,\ 4\} = 4$ *e* $\min\{6,\ -3\} = -3$.

b) *Se* $a < x < b$, *então* $\mid x \mid < \max\{\mid a \mid, \mid b \mid\}$.

Por exemplo, se $2 < x < 6$, *então* $\mid x \mid < 6$ *e se* $-12 < x < 6$, *então* $\mid x \mid < 12$.

Exercícios 1-4

1. Resolver as seguintes equações:

1.	$\mid 2x-4 \mid = 6$	**2.**	$\mid\mid 5-2x \mid -4 \mid = 8$	**3.**	$\mid x^2-4 \mid = \mid 2x \mid$
4.	$\left\lvert \dfrac{3x+1}{x-1} \right\rvert = 4$	**5.**	$\mid x^2-4 \mid = 3x+4$	**6.**	$\mid x^2+4 \mid = \mid 2x \mid$
7.	$\mid 4x+3 \mid = 7$	**8.**	$\mid x^2+2 \mid = 2x+1$	**9.**	$\mid 2x+2 \mid = 6x-18$
10.	$x^2-2 \mid x \mid = 3$	**11.**	$\mid x-4 \mid = \mid x-2 \mid$	**12.**	$\mid x^2-x-6 \mid = x+2$
13.	$\mid 2x-5 \mid = 3$	**14.**	$\mid x-2 \mid = \mid 3-2x \mid$	**15.**	$2 \mid x-1 \mid -x^2+2x+7 = 0$

16. $2^{\mid x+2 \mid} - \mid 2^{x+1}-1 \mid = 2^{x+1}+1$ **17.** $\mid x-1 \mid + 4 \mid x-3 \mid = 2 \mid x+2 \mid$

2. Represente cada um dos conjuntos seguintes através de desigualdades envolvendo valores absolutos.

1. $A = \{\, x \in \mathbb{R} \,/.\, x < -4 \text{ ou } x > 4 \,\}$ **2.** $B = \{\, x \in \mathbb{R} \,/.\, x \leq -6 \text{ ou } x \geq 4 \,\}$

3. $C = \{\, x \in \mathbb{R} \,/.\, x > -9 \text{ ou } x < 9 \,\}$ **4.** $D = \{\, x \in \mathbb{R} \,/.\, x \geq -9 \text{ ou } x \leq 7 \,\}$

3. Represente geometricamente os seguintes conjuntos, para logo em seguida expressá-los na forma de intervalos.

1. $A = \{\, x \in \mathbb{R} \,/.\, 8 < x < 13 \,\}$ **2.** $B = \{\, x \in \mathbb{R} \,/.\, -14 \leq x < 5 \,\}$

3. $C = \{\, x \in \mathbb{R} \,/.\, -13 \leq x < 15 \,\}$ **4.** $D = \{\, x \in \mathbb{R} \,/.\, \mid x \mid < 6 \,\}$

5. $E = \{\, x \in \mathbb{R} \,/.\, \mid 9-x \mid < 7 \,\}$ **6.** $F = \{\, x \in \mathbb{R} \,/.\, \mid x+5 \mid \geq 8 \,\}$

7. $G = \{\, x \in \mathbb{R} \,/.\, x > -9 \text{ ou} x < 9 \,\}$ **8.** $H = \{\, x \in \mathbb{R} \,/.\, \mid 9-x \mid < \mid x+5 \mid \,\}$

4. Resolver as seguintes inequações:

1. $\mid x+4 \mid - \mid 5-2x \mid > 4$ **2.** $\mid x^2-4 \mid + \mid 2x-5 \mid < 6$

3. $\mid 3- \mid 2x+3 \mid\mid < 2$ **4.** $\mid 3x-2 \mid \leq \mid 4x-4 \mid + \mid 7x-6 \mid$

5. Encontrar o conjunto solução em $\mathbb{R}$.

1.	$\mid 2x+3 \mid +4 = 5x$	**2.**	$\mid x^2-4 \mid = -2x+4$	**3.**	$\mid 3x-1 \mid = 2x+5$
4.	$\mid 5x-3 \mid = \mid 3x+5 \mid$	**5.**	$\mid 2x+6 \mid = \mid 4-5x \mid$	**6.**	$\left\lvert \dfrac{6-5x}{3+x} \right\rvert \leq \dfrac{1}{2}$
7.	$\left\lvert \dfrac{1}{6-3x} \right\rvert \leq \dfrac{2}{\mid x+3 \mid}$	**8.**	$\mid x \mid -2 < \mid x-1 \mid$	**9.**	$\mid x-3 \mid +2 \mid x \mid < 5$

6. Determine o valor de E, se: $E = \dfrac{\mid 4x+1 \mid - \mid x-1 \mid}{x}$ $\forall\, x \in (0,\ 1)$.

7. Sejam a e b números reais, mostre que:

$$\max\{\ a,\ b\} = \frac{a+b+\mid b-a\mid}{2} \qquad \min\{\ a,\ b\} = \frac{a+b-\mid b-a\mid}{2}$$

8. Suponha $\varepsilon > 0$ e mostre o seguinte:
1. Se $\mid x - x_0 \mid < \min\{\frac{\varepsilon}{2(\mid y_0 \mid +1)}, 1\}$ e $\mid y - y_0 \mid < \frac{\varepsilon}{2(\mid x_0 \mid +1)} \Rightarrow \mid xy - x_0 y_0 \mid < \varepsilon$
2. Se $\mid y_0 \mid \neq 0$ e $\mid y - y_0 \mid < \min\{\frac{\mid y_0 \mid}{2}, \frac{\varepsilon \mid y_0 \mid^2}{2}\} \Rightarrow y \neq 0$ e $\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \varepsilon.$

9. Mostre que, se os números $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$ não são iguais a zero e formam uma progressão aritmética, então: $\dfrac{1}{a_1.a_2} + \dfrac{1}{a_2.a_3} + \dfrac{1}{a_3.a_4} + \cdots + \dfrac{1}{a_{n-1}.a_n} = \dfrac{n-1}{a_1.a_n}.$

10. Para testar se uma moeda é equilibrada, um pesquisador lança 100 vezes e anota o número x de cara. A teoria estatística afirma que a moeda deve ser considerada não equilibrada se $\left|\dfrac{x-50}{5}\right| \geq 1,645$. Para que valores de x a moeda será equilibrada ?

11. A produção diária estimada x de uma refinaria é dada por $\mid x - 300.000 \mid \leq 275.000$, onde x é medida em barris de petróleo. Determine os níveis máximo e mínimo de produção.

12. As alturas h de dos terços de alunos da Licenciatura em Matemática, verificam a desigualdade $\left|\dfrac{h-1,76}{0,22}\right| \leq 1$, onde h é medido em metros. Determine o intervalo da reta real que essas alturas se situam.

13. Um terreno deve ser lotado. Os lotes, todos retangulares, devem ter área superior ou igual a $400\,m^2$, e a largura de cada um deve ter 30m a menos que o comprimento. Determine as dimensões do menor dos lotes que cumprem tais condições.

14. Uma galeria vai organizar uma exposição e fez as seguintes exigências: **i)** a área de cada quadro deve ser no mínimo de $3.200\,cm^2$; **ii)** os quadros devem ser retangulares e a altura deve ter $40\,cm$ a mais que a largura. Dentro dessas especificações, em que intervalo de números reais devem se situar as larguras dos quadros?

15. Uma empresa de utilidade pública tem uma frota de aviões. Estima-se que o custo operacional de cada avião seja de $C = 0,2k + 20$ por ano, onde C é medido em milhões de reais e k em quilômetros de vôo; se a empresa quer que o custo operacional de cada avião seja menor que 100 milhões de reais, então k tem ser menor a que valor?

1.6 Axioma do supremo

Definição 1.15.
Seja A um subconjunto não vazio do conjunto de números reais $\mathbb{R}$.

i) Dizemos que o conjunto A é limitado superiormente, se existe um elemento $k_1 \in \mathbb{R}$ tal que: $a \leq k_1$, para todo $a \in A$.

ii) Dizemos que o conjunto A é limitado inferiormente, se existe um elemento $k_2 \in \mathbb{R}$ tal que: $k_2 \leq a$, para todo $a \in A$.

iii) Dizemos que o conjunto A é limitado, se for limitado superior e inferiormente.

Exemplo 1.40.

a) Os conjuntos $\mathbb{N}$, $A = (0, +\infty)$ e $B = \{ \frac{1}{n}/. \quad n \in \mathbb{N} \}$ são conjuntos limitados inferiormente; um limite inferior é $k_1 = -5$.

b) Os conjuntos $A = (-\infty, 3]$ e $B = \{ x \in \mathbb{R}/. \quad 5 - (x-1)^2 > 0 \}$ são conjuntos limitados superiormente; um limite superior é $k_2 = 5$.

c) O conjunto $A = \{ \frac{1}{n} /. \quad n \in \mathbb{N} \}$ é limitado.

Definição 1.16. *Supremo. Ínfimo.*
Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$.

i) O número real s é chamado supremo de A e denotamos $s = \sup A$ quando:

1^o O número s é limite superior de A; isto é $a \leq s$, para todo $a \in A$.

2^o Se $b \in A$ e $b < s$ então existe $x \in A$ tal que $b < x \leq s$.

ii) O número real r é chamado ínfimo de A e denotamos $r = \inf A$ quando :

1^o O número r é limite inferior de A; isto é $r \leq a$, para todo $a \in A$.

2^o Se $b \in A$ e $r < b$ então existe $x \in A$ tal que $r \leq x < b$.

Assim, segue que o menor dos limites superiores é chamado de "supremo" e, o maior dos limites inferiores é chamado "ínfimo".

O ínfimo ou supremo de um conjunto, pode ou não pertencer ao próprio conjunto. Por exemplo o ínfimo para o conjunto $A = \{ \frac{1}{n}/. \quad n \in \mathbb{N} \}$ é o zero e não pertence ao conjunto.

Definição 1.17. *Máximo. Mínimo.*
Se o supremo e ínfimo de um conjunto A pertencem ao mesmo conjunto A, então são chamados de "máximo" e "mínimo" respectivamente de A e denotamos $\max A$ *e* $\min A$ *(respectivamente).*

Exemplo 1.41.

Sejam os conjuntos: $A = (0,\ 9]$ $\qquad B = \{\ \frac{1}{n}/.\quad n \in \mathbb{N}\,\}$ $\qquad C = \mathbb{N}$.

Então: $\inf .(A) = 0$ *e* $\sup .(A) = 9 = \max(A)$; $\quad \inf(B) = 0$ *e* $\sup(B) = 1 = \max(B)$

$\inf(C) = 0$ *e* $\sup(C)$ *não existe.*

Axioma 1.2. *Axioma do Supremo.*

Todo conjunto de números reais não vazio limitado superiormente, tem supremo

Propriedade 1.15.

Se o conjunto $A \subset \mathbb{R}$ *é limitado inferiormente sendo* $A \neq \emptyset$ *, então o conjunto A possui ínfimo.*

Demonstração.

Seja $B = \{\,-x \in \mathbb{R}\,/.\quad x \in A\,\},\ \ B \neq \emptyset$

Se $\mathbf{c}$ é limite inferior de A, então $\mathbf{c} \leq a \quad \forall\, a \in A$; logo $-a \leq -\mathbf{c} \quad \forall\, a \in A$ então $-\mathbf{c}$ é limite superior de B e pelo axioma do supremo então B possui supremo $s = \sup(B)$; assim $-s = \inf(A)$. □

Propriedade 1.16. *Princípio da boa ordem.*

Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ *possui mínimo.*

A demonstração é exercício para leitor.

1.7 Indução matemática

Definição 1.18.
Um subconjunto M de números reais diz-se que é "conjunto indutivo", se cumpre as seguintes propriedades:

i) $0 \in M$.

ii) $\forall\, x \in M$ então $(x+1) \in M$

Exemplo 1.42.

- O conjunto $\mathbb{R}$ de números reais é indutivo, pois 0 é um número real e $x+1$ também é real para todo x real.
- O conjunto de todos os números inteiros é indutivo.
- O conjunto $\{\,0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ \cdots\}$ é indutivo

Exemplo 1.43.

Segundo nossa definição, os seguintes conjuntos não são indutivos:

- $\{\,1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\}$
- $\{\,0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\,\}$
- $\{\,0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \cdots\}$

Em matemática, muitas definições e proposições se realizam utilizando o princípio de indução matemática. A generalização de uma propriedade após verificação de que a propriedade é válida em alguns casos particulares, pode conduzir a sérios enganos como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 1.44.

Considere a relação $f(n) = 2^{2^n} + 1$ *definida para todo* $n \in \mathbb{N}$.
Temos que, quando:

$n = 0$ então $f(0) = 2^{2^0} + 1 = 3$

$n = 1$ então $f(1) = 2^{2^1} + 1 = 5$

$n = 2$ então $f(2) = 2^{2^2} + 1 = 17$

$n = 3$ então $f(3) = 2^{2^3} + 1 = 257$

$n = 4$ então $f(4) = 2^{2^4} + 1 = 65.537$

Observe que todos aqueles números encontrados são números primos; P. Fermat (1601−1665) acreditou que a fórmula $f(n)$ representaria números primos, qualquer que fosse o valor para $n \in \mathbb{N}$, pois esta indução era falsa Euler[7] mostrou que para $n = 5$ resulta $f(5) = 4.294.967.297 = 641 \times 6.700.417$ logo, a afirmação de P. Fermat foi precipitada.

Exemplo 1.45.

Consideremos a relação $f(n) = n^2 + n + 41$ *definida para todo* $n \in \mathbb{N}$

[7]Leonard Euler (1707 − 1783) estudou com Johann Bernoulli, ainda pai de treze filhos e ficando completamente cego, escreveu mais de oitocentos trabalhos e livros em todos os ramos da matemática.

Observe que, para valores menores que 40, $f(n)$ é um número primo. Com efeito, se $n = 1$, $f(1) = 43$; se $n = 2$, $f(2) = 47$; se$n = 3$, $f(3) = 53$; $\dots$; se $n = 39$, $f(39) = 1.601$. Porém se $n = 40$ temos $f(40) = 40^2 + 40 + 41 = (41)(41)$ não é primo, mostrando que a sentença é falsa. Em 1.772 Euler mostrou que $f(n) = n^2 + n + 41$ assume valores primos para $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots\ ,\ 39$.

Euler observando que $f(n-1) = f(-n)$ mostrou que n^2+n+41 assume valores primos para 80 números inteiros consecutivos, sendo estes inteiros: $n = -40,\ -39,\ -38,\ \dots\ 0,\ 1, 2,\ 3,\ \dots\ 38,\ 39$; substituindo a variável n por $n - 40$ temos $f(n - 40) = g(n) = n^2 - 79n + 1.601$; logo $g(n) = n^2 - 79n + 1.601$ assume valores primos para todos os números naturais de 0 até 79.

Exemplo 1.46.

A sentença: "$2n + 2$ é a soma de dois números primos" é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $\dots$ e, como nos exemplos anteriores após muitas tentativas, não achamos nenhum número natural que a torne falsa.

Ninguém até hoje, achou um número natural que tornasse a sentença falsa e ninguém, até hoje, sabe demonstrar que a sentença é sempre verdadeira. Esta famosa sentença conhecida como conjetura de Goldbach, foi feita em 1742, em uma carta dirigida a Euler diz:

"*Todo inteiro par, maior do que* 2, *é a soma de dois números primos.*"

Não sabemos até hoje se esta sentença é verdadeira ou falsa.

Em resumo, dada uma afirmação sobre números naturais, se encontramos um contra-exemplo, sabemos que a afirmação não é sempre verdadeira.

E se não achamos um contra-exemplo? Nesta caso, suspeitando que a afirmação seja verdadeira sempre, uma possibilidade é tentar demonstra-la recorrendo ao princípio de indução; é necessário portanto, dispor de um método com base lógica que permita decidir sobre a validade ou não de uma determinada indução, isto esta garantido com a seguinte propriedade:

Propriedade 1.17. *Primeiro princípio de indução matemática.*

Se $P(n)$ é uma propriedade enunciada em termos de n, para $n \in \mathbb{N}$ tal que:

1^o $P(1)$ é verdadeiro

2^o $P(h)$ é verdadeiro para $h > 1$, implica $P(h + 1)$ é verdadeiro.

Então $P(n)$ é verdadeiro, para todo $n \in \mathbb{N}$.

A demonstração é exercício para o leitor.

Exemplo 1.47.

Mostre que $1+2+3+4+\ \dots\ +n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Solução.

Neste exemplo observe que $P(n): 1+2+3+4+\ \dots\ +n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Para $n=1$, $\quad P(1): 1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$ é verdadeira.

Suponhamos que $P(h): 1+2+3+4+\ \dots\ +h = \dfrac{h(h+1)}{2}$ seja verdadeira.

Mostrarei que $P(h+1): 1+2+3+4+\dots\ +h+(h+1) = \dfrac{(h+1)[(h+1)+1]}{2}$ é verdadeiro.

Com efeito, temos que:

$$1+2+3+4+\ \dots\ +h+(h+1) = \frac{h(h+1)}{2} + (h+1) =$$
$$= (h+1)(\frac{h}{2}+1) = \frac{(h+1)(h+2)}{2} = \frac{(h+1)[(h+1)+1\ ]}{2}.$$

Logo, pelo princípio de indução matemática cumpre:

$$1+2+3+4+\ \dots\ +n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Exemplo 1.48.

Deseja-se construir uma parede decorativa com tijolos de vidro da seguinte forma: a primeira fila (base) deverá ter 100 *tijolos, a segunda fila,* 99 *tijolos, a terceira,* 98 *tijolos e assim por diante até a última fila que deverá ter apenas* 1 *tijolo. Determine o número total de tijolos necessários para construir desta parede. será igual a:*
Solução.

Observe que a quantidade de número de tijolos necessários para cada fila é um número natural decrescente a partir de 100 logo, temos aplicando a fórmula do Exemplo (1.47), que o total de tijolos é: $\quad 100+99+\ \cdots\ +3+2+1 = \dfrac{100(100+1)}{2} = 5.050$.

Portanto, são necessários 5.050 tijolos.

Exemplo 1.49.

Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$ *a expressão* $n^3 - n$ *é divisível por seis.*
Solução.

Temos que $P(n):\ n^3 - n$

$P(1): 1^3 - 1 = 0$ é divisível por 6.

Suponha que $P(h):\ h^3 - h$ seja divisível por 6 sendo $h \in \mathbb{N}$.

Para $n = h+1$ temos $P(h+1):$

$$(h+1)^3 - (h+1) \ = \ (h+1)[(h+1)^2 - 1] \ = \ h^3 - h \ + \ 3h(h+1) \qquad (1.8)$$

Observe que $3h(h+1)$ é divisível por 6.

Com efeito, se $h=1$ temos que $3(1)(2)$ é divisível por 6. Suponha $3h(h+1)$ é divisível por 6, para todo $h \in \mathbb{N}$.

Logo para $h+1$ segue que $3(h+1)(h+2) = 3h(h+1)+6$ sendo divisível por 6. Então em (1.8) da hipótese auxiliar para $P(n)$ concluímos que para toda $n \in \mathbb{N}$ a expressão $n^3 - n$ é divisível por seis.

Exemplo 1.50.

Mostre que, para todo número real $(1+x)^n \geq -1$ *e para qualquer natural* $n \in \mathbb{N}$ *então temos a desigualdade* $(1+x)^n \geq 1+nx$.
Solução.

Seja S o conjunto de números naturais para os quais $(1+x)^n \geq 1+nx$.

1^o $1 \in S$ pois, $(1+x)^1 \geq 1+(1)x$.

2^o Se $h \in S$, temos que $(1+x)^h \geq 1+hx$, então $(1+x)^{h+1} = (1+x)(1+x)^h \geq (1+x)(1+hx) \geq 1+x+hx+hx^2 \geq 1+(h+1)x$.

Logo, se $h \in S$ então $(h+1) \in S$.

Aplicando o princípio de indução matemática temos que $S = \mathbb{N}$.

Propriedade 1.18. *Segundo princípio de indução matemática.*

Se $P(n)$ *é uma proposição enunciada para* $n \in \mathbb{N}$ *tal que:*

1^o $P(n_o)$ *é verdadeiro.*

2^o $P(h)$ *é verdadeiro para* $h > n_o$, *implica* $P(h+1)$ *é verdadeiro. Então* $P(n)$ *é verdadeiro* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *tal que* $n \geq n_o$.

A demonstração é exercício para o leitor.

Exemplo 1.51.

Mostre que se n *é qualquer inteiro positivo,* $\dfrac{1}{3}(n^3+2n)$ *é um inteiro.*
Solução.

Seja S o conjunto de números inteiros positivos tais que $\dfrac{1}{3}(n^3+2n)$ é um inteiro.

O número $1 \in S$ pois $\dfrac{1}{3}(1^3+2(1)) = 1$.

Suponha que $h \in S$; isto é $\dfrac{1}{3}(h^3+2h)$ é um inteiro.

Então, $\dfrac{1}{3}[(h+1)^3+2(h+1)] = \dfrac{1}{3}[(h^3+3h^2+3h+1)+(2h+2)] = \dfrac{1}{3}(h^3+2h)+(h^2+h+1)$ é um inteiro.

Assim $h \in S$ implica $(h+1) \in S$. Logo $S = \mathbb{N}$ pelo princípio de indução. □

Exemplo 1.52.

Sejam $a,\ b \in \mathbb{R}^+$ tais que $a \neq b$. Mostre que $2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^+$, *sempre é verdadeira.*

Demonstração.

Para $n = 2$ a desigualdade é da forma:

$$2(a^2 + b^2) > (a+b)^2 \tag{1.9}$$

Como $a \neq b$, temos a desigualdade $a^2 + b^2 > 2ab$, somando $a^2 + b^2$ obtemos $2(a^2 + b^2) > 2ab + a^2 + b^2 = (a+b)^2$ isto implica a desigualdade (1.9), portanto a desigualdade é válida para $n = 2$.

Suponhamos que a desigualdade seja válida para $n = h$, isto é

$$(a+b)^h < 2^{h-1}(a^h + b^h) \tag{1.10}$$

Mostraremos a desigualdade para $n = h+1$, isto é a mostrar que

$$(a+b)^{h+1} < 2^h(a^{h+1} + b^{h+1}) \tag{1.11}$$

Temos de (1.10) que $(a+b)^{h+1} = (a+b)^h(a+b) < 2^{h-1}(a^h + b^h)(a+b)$, isto é:

$$(a+b)^{h+1} < 2^{h-1}[a^{h+1} + b^{h+1} + ab^h + ba^h] \tag{1.12}$$

Como $a \neq b$, suponhamos $a > b$, como $a,\ b \in \mathbb{R}$ então $a^h > b^h$, logo $(a^h - b^h)(a-b) > 0$ sempre é verdadeira.

Para o caso $a < b$, então $a^h < b^h$ e a desigualdade $(a^h - b^h)(a-b) > 0$ é o produto de números negativos, logo

$$(a^h - b^h)(a-b) > 0$$

isto implica que

$$a^{h+1} + b^{h+1} - ab^h - ba^h > 0 \quad \Rightarrow \quad ab^h + ba^h < a^{h+1} + b^{h+1}$$

Em (1.12) temos

$$(a+b)^{h+1} < 2^{h-1}[a^{h+1} + b^{h+1} + ab^h + ba^h < 2^h(a^{h+1} + b^{h+1})$$

Portanto, se a desigualdade (1.10) também vale para $n = h+1$, logo vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.8 Propriedades dos números inteiros

Estudaremos algumas propriedades básicas para números inteiros, este conjunto $\mathbb{Z}$ podemos estudar como uma extensão do conjunto $\mathbb{N}$

1.8.1 Divisibilidade

Definição 1.19.
Sejam os números $d,\ n \in \mathbb{Z}$, diz-se que d é divisor de n e escrevemos $d \mid n$ quando $n = c \cdot d$ para algum $c \in \mathbb{Z}$.

Observe que a notação $d \mid b$ não representa nenhuma operação em $\mathbb{Z}$, nem representa uma fração. Trata-se de uma sentença que diz ser verdade que existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $n = cd$.

A negação dessa sentença é representada por a $d \nmid n$, significando que não existe nenhum número inteiro $c \in \mathbb{Z}$ tal que $n = cd$. Portanto, temos que $0 \nmid n$, se $n \neq 0$

A divisibilidade estabelece uma relação binária entre números inteiros com as seguintes propriedades.

Propriedade 1.19.

Sejam $a,\ b,\ d,\ ,n\ ,m\ \in \mathbb{Z}$

1. $n \mid n$ reflexiva

2. $d \mid n \quad \text{e} \quad n \mid m \quad \Rightarrow \quad d \mid m$ transitiva

3. $d \mid n \quad \text{e} \quad d \mid m \quad \Rightarrow \quad d \mid (an + bm)$ para algum $a,\ b \in \mathbb{Z}$ linear

4. $d \mid n \quad \Rightarrow \quad ad \mid an$ multiplicação

5. $ad \mid an \quad \text{e} \quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad d \mid n$ simplificação

6. $1 \mid n$ 1 é divisor de todos os inteiros

7. $n \mid 0$ cada inteiro é divisor do zero

8. $0 \mid n \quad \Rightarrow \quad n = 0$ zero é divisor somente do zero

9. $d \mid n \quad \text{e} \quad n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mid d \mid \leq \mid n \mid$ comparação

10. $d \mid n \quad \text{e} \quad n \mid d \quad \Rightarrow \quad \mid d \mid = \mid n \mid$

11. $d \mid n \quad \text{e} \quad d \neq 0 \quad \Rightarrow \quad (n \mid d) \mid n$

Dizer que um número a é divisor de outro b, não significa dizer que a divide b, observe a parte **8**. desta propriedade, aqui zero é divisor do zero.

1.8.2 Máximo divisor comum. Mínimo múltiplo comum

Definição 1.20. *Divisor comum.*
Sejam $a,\ b, d \in \mathbb{Z}$*, se o número* d *é um divisor dos números* a *e* b*, o número* d *é chamado divisor comum de* a *e* b*.*

Propriedade 1.20.
Dados os números inteiros a *e* b*, existe um divisor comum da forma* $d = ax + by$ *para algum* $x,\ y \in \mathbb{Z}$ *e, todo divisor comum de* a *e* b *divide este* d*.*

A demonstração desta propriedade é exercício para o leitor. □

Propriedade 1.21.
Dados $a,\ b \in \mathbb{Z}$*, existe um e somente um* $d \in \mathbb{Z}$ *com as seguintes propriedades:*

a) $d \geq 0$ — d não é negativo

b) $d \mid a$ e $d \mid b$ — d é um divisor comum de a e b

c) Se $c \mid a$ e $c \mid b \Rightarrow c \mid d$ — cada divisor comum é divisor de d

Demonstração.
Pela *Propriedade* (1.20) existe pelo menos um d que cumpre as condições **(b)** e **(c)**, logo $-d$ também cumpre, logo esta provado a existência.
Porém, se d' cumpre **(b)** e **(c)** então $d \mid d'$ e $d' \mid d$, portanto $| d |=| d' |$.
Logo existe somente um $d \geq 0$ que cumpre **(b)** e **(c)**. □

Definição 1.21. *Máximo divisor comum.*
O número d *da Propriedade* (1.21) *é chamado de máximo divisor comum (m.d.c.) de* a *e* b *e denota-se* $mdc\{\ a,\ b\ \}$*.*

Propriedade 1.22. *Lema de Euclides*[8]*.*
Se $a \mid bc$ *e* $mdc\{\ a,\ b\ \} = 1$ *então* $a \mid c$*.*
Demonstração.

Desde que $mdc\{\ a,\ b\ \} = 1$ podemos escrever $1 = ax + by$ para algum $x,\ y \in \mathbb{Z}$, consequentemente $c = cax + cby$, Como $a \mid acx$ e $a \mid bc$, então $c = cax + zay$ logo $a \mid c$.

[8]Euclides de Alexandria "300 *a.C.*" foi professor, matemático, platónico e escritor possivelmente grego, muitas vezes referido como o "Pai da Geometria". Além de sua principal obra "Os Elementos", Euclides também escreveu sobre seções cônicas, geometria esférica, teoria dos números.

Definição 1.22. *Mínimo múltiplo comum.*
Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ *não nulos, o mínimo múltiplo comum de* a *e* b*, denotado* $mmc\{a, b\}$ *é definido por*

$$mmc\{a, b\} = \frac{a \cdot b}{mdc\{\, a,\, b\,\}}$$

1.8.3 Números primos

Definição 1.23.
Diz-se que o inteiro n *é um número primo, se* $n > 1$ *e os únicos divisores positivos de* n *são* 1 *e o próprio* n*. Se* n *não é número primo então é chamado de número composto.*

Exemplo 1.53.

São números primos: 2, 3, 7, 11, 13, 17, 19

São números compostos: 4, 6, 8, 10, 16, 24

O número 1 não é primo; observe que não cumpre a definição.

Propriedade 1.23.

Todo número inteiro $n > 1$ *é número primo ou produto de números primos.*

A demonstração desta propriedade é exercício para o leitor.

Propriedade 1.24. *Euclides.*

Existe uma infinidade de números primos.

A demonstração desta propriedade é exercício para o leitor.

Propriedade 1.25. *Teorema fundamental da aritmética.*

Todo número inteiro $n > 1$ *podemos expressar como produto de fatores primos de modo único.*

A demonstração deste teorema é exercício para o leitor.

Exemplo 1.54.

Mostre que $13|2^{70} + 3^{70}$.

Demonstração.

Denotemos para este exemplo $m(13)$ como algum múltiplo de 13, isto é $m(13) = 13\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Z}$.

Tem-se: $2^4 = 13 + 3, \quad 2^5 = m(13) + 6, \quad 2^6 = m(13) + 4 = m(13) - 1$. Logo,

$$2^{70} = 2^4 \times (2^6)^{11} = 2^4[m(13) - 1]^{11} = m(13) - 2^4 = m(13) - 3$$

Por outro lado, $3^2 = 13 - 4, \quad 3^3 = m(13) + 1$. então

$$3^{70} = 3 \cdot (3^3)^{23} = 3 \cdot (m(13) + 1)^{23} = 3(m(13) + 1^{23}) = m(13) + 3$$

Assim, $2^{70} + 3^{70} = [m(13) - 3] + m(13) + 3 = m(13)$.
Portanto, $\quad 13|2^{70} + 3^{70}$.

Exemplo 1.55.

Mostre que existem infinitos valores de $n \in \mathbb{Z}$ para os quais 7 e 11 são divisores de $8n^2 + 5$.
Demonstração.

Se 7 e 11 são divisores de $8n^2 + 5$, segue que 77 também é um divisor de $8n^2 + 5$, pois o $m.d.c\{ 7, 11 \} = 1$.
Se 77 é um divisor de $8n^2 + 5$ então existe $\beta \in \mathbb{Z}$ tal que

$$8n^2 + 5 = 77\beta \quad \Rightarrow \quad 8n^2 + 5 - 77 = 77(\beta - 1) \quad \Rightarrow \quad 8(n^2 - 9) = 77(\beta - 1)$$

Como $8 \nmid 77$, segue que $8|(\beta - 1)$ e $77|(n^2 - 9)$.
Assim, para todo $\alpha \in \mathbb{N}$ temos $\beta - 1 = 8\alpha$ e $n^2 - 9 = 77\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{N}$, logo $\beta = 1 + 8\alpha$.
Portanto, $8n^2 + 5 = 77(1 + 8\alpha)$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}$, assim existem infinitos valores de $n \in \mathbb{Z}$ para os quais $8n^2 + 5$ é divisível por 7 e por 11.

Exemplo 1.56.

Seja n um número natural. Mostre que um, e apenas um, número de cada terna abaixo é divisível por 3.

a) $n, \ n + 2, \ n + 4$ **b)** $n, \ n + 10, \ n + 23$ **c)** $n, \ n + 1, \ 2n + 1$.

Demonstração.

O conjunto de todos números naturais podemos representar mediante o conjunto $A = \{ 3k, \ 3k + 1, \ 3k + 2, \quad k \in \mathbb{N} \}$.
Se $n = 3k$, então para todos os 4 exercícios um, e apenas um, número de cada terna é divisível por 3

a) Para o conjunto $n, \ n + 2, \ n + 4$

- Se $n = 3k+1$ então a terna dada podemos escrever na forma $3k+1, 3k+3, 3k+5$ logo um, e apenas um, número da terna é divisível por 3, o número $3k + 3$.

- Se $n = 3k+2$ então a terna dada podemos escrever na forma $3k+2$, $3k+4$, $3k+6$ logo um, e apenas um, número da terna é divisível por 3, o número $3k + 6$.

Com qualquer das três hipóteses na terna $n,\ n+2,\ n+4$ um, e apenas um, número da é divisível por 3.

b) Para o conjunto $n,\ n+10,\ n+23$

- Se $n = 3k+1$ então a terna dada podemos escrever na forma $3k+1, 3k+11, 3k+24$ logo um, e apenas um, número da terna é divisível por 3, o número $3k + 24$.

- Se $n = 3k+2$ então a terna dada podemos escrever na forma $3k+2, 3k+12, 3k+25$ logo um, e apenas um, número da terna é divisível por 3, o número $3k + 12$.

Com qualquer das três hipóteses na terna um, e apenas um, número da é divisível por 3.

c) Para o conjunto $n,\ n+1,\ 2n+1$

- Se $n = 3k+1$ então a terna dada podemos escrever na forma $3k+1$, $3k+2$, $6k+3$ logo um, e apenas um, número da terna é divisível por 3, o número $6k + 3$.

- Se $n = 3k+2$ então a terna dada podemos escrever na forma $3k+2$, $3k+3$, $6k+5$ logo um, e apenas um, número da terna é divisível por 3, o número $3k + 3$.

Com qualquer das três hipóteses na terna um, e apenas um, número da é divisível por 3.

Exercícios 1-5

1. Caso existam, determine o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo para cada um dos seguintes conjuntos:

   1. $B = \{ x \in \mathbb{Q}/. \quad | x^2 - 4 | < 16 \}$

   2. $A = \{ x \in \mathbb{Z}/. \quad | x^2 - 9 | + 3 | x - 4 | < 16 \}$

   3. $C = \{ x \in \mathbb{N}/. \quad | x^2 - x + 1 | < 3 \}$

   4. $D = \{ x \in \mathbb{I}/. \quad | 5x - 10 | + | x | \geq 1 \}$

   5. $F = \{ x \in \mathbb{R}/. \quad | x^2 - 9 | \geq 16 - x \}$

   6. $E = \{ x \in \mathbb{Z}/. \; | x^2 - 16 | + | x - 4 | > 1 \}$

   7. $H = \{ x \in \mathbb{R}/. \; | x^2 - 9 | < 16 - x \}$

   8. $G = \{ x \in \mathbb{R}/. \; | 9 - x^2 | - | x - 4 | < 1 \}$

2. Mostre que 1 é o supremo do conjunto $E = \{ x/. \quad x = \dfrac{2^n - 1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N} \}$.

3. Mostre que, se o produto de n números positivos é igual a 1 (um), a soma dos mesmos não é menor que n.

4. Mostre que, se $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n$ são números positivos, temos:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + \frac{x_4}{x_5} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n$$

5. Utilizando o princípio de indução matemática, mostre cada um dos seguintes enunciados, onde $n \in \mathbb{N}$:

   1. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

   3. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$.

   4. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$.

   5. $2 + 5 + 8 + \cdots + (3n - 1) = \dfrac{n(1+3n)}{2}, \quad n \geq 1$

   6. $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1, \quad n > 1$

7. $1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

8. $\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{3\times 5}+\dfrac{1}{5\times 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$.

6. Utilizando o princípio de indução matemática, verifique a validade de cada um dos seguintes enunciados:

1. (n^2+n) é divisível por 2, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

2. (n^3+2n) é divisível por 3, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

3. $n(n+1)(n+2)$ é divisível por 6. $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $n\neq 0$.

4. $(3^{2n}-1)$ é divisível por 8, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

5. (10^n-1) é divisível por 9, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

6. $2^n\geq n^2$; $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $n\geq 4$

7. $3^n\geq(1+2n)$; $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

8. 8 é um divisor de $5^{2n}+7$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$

7. Determine a validade das seguintes proposições; justifique sua resposta.

1. Se $x,\ y\in\mathbb{R}$, com $0<x<y$, então $x^n<y^n$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $n\neq 0$.

2. 4^n-1 é divisível por 3, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

3. (8^n-5^n) é divisível por 3, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

4. $(10^{n+1}+10^n+1)$ é divisível por 3, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

5. $4^n>n^4$; $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $n\geq 5$.

6. $\dfrac{2^{2n+1}+3^{2n+1}}{5}$ é um número inteiro.

8. Mostre que, para quaisquer que sejam os números positivos diferentes a e b é válida a desigualdade: $\sqrt[n+1]{ab^n}<\dfrac{a+bn}{n+1}$.

9. Mostre a seguinte igualdade: $\sum\limits_{i=1}^{n}(b+a_i)=nb+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$

10. Se $n\in\mathbb{N}$, o fatorial do número n é denotado $n!$, e definido do modo seguinte: $0!=1$, $1!=1$ e quando $n>1$ define-se $n!=1\times 2\times 3\times 4\times 5\times\cdots(n-1)\times n$ ou $n!=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 4\times 3\times 2\times 1$. Mostre que:

1. $2^{n-1}\leq n!$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$. **2.** $2^n<n!<n^n$ para $\forall\, n\in\mathbb{N}$ $n\geq 4$.

11. Mostre a desigualdade: $n!<\left[\dfrac{n+1}{2}\right]^n$ para n natural, com $n\geq 2$.

12. Mostre que, se $|\,x\,|<1$, para qualquer inteiro $n\geq 2$, então é válida a desigualdade: $(1-x)^n+(1+x)^n<2^n$.

Miscelânea 1-1

1. Sejam a, b e c raízes da equação $x^3 - 3x^2 + 9x - 2 = 0$. Mostre que o valor de $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{69}{4}$.

2. Determine a soma: $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n$.

3. Determine a soma: $1+11+111+1111+\cdots+111111111\cdots1$, se o último somando é um número de n algarismos.

4. Determine a soma: $S = nx + (n-1)x^2 + (n-2)x^3 + \cdots + 2x^{n-1} + x^n$.

5. Determine a soma: $S = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \dfrac{7}{2^4} + \cdots + \dfrac{2n-1}{2^n}$

6. Mostre que a média geométrica de **n** números positivos não ultrapassa a média aritmética destes mesmos **n** números.

7. Mostre que, se $m > 1$, $m \in \mathbb{N}$ são válidas as seguintes desigualdades:

   1. $\dfrac{1}{m+1} + \dfrac{1}{m+2} + \dfrac{1}{m+3} + \cdots + \dfrac{1}{2m} > \dfrac{1}{2}$

   2. $\dfrac{1}{m+1} + \dfrac{1}{m+2} + \dfrac{1}{m+3} + \cdots + \dfrac{1}{m+(2m+1)} > 1$

8. Prove que, para qualquer inteiro positivo n é válido o seguinte:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}$$

9. Mostre por indução sobre n, que:

   1. Se$x = p + \sqrt{q}$, onde p e q são racionais, e $n \in \mathbb{N}$ então $x^n = a + b\sqrt{q}$ sendo a e b números racionais.

   2. Mostre que : $(p - \sqrt{q})^n = a - b\sqrt{q}$.

10. Mostre que, se os números positivos a, b, c formam uma progressão aritmética; então os números $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{b}}$ também formam uma progressão aritmética.

11. O símbolo $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ é usado para representar a soma de todos os a_i para valores do inteiro i desde 1 até n; isto é $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$. Mostre que: $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i(i+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

12. Calcular a soma $S = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ sendo $a_i = k$ uma constante.

13. Mostre a desigualdade $\dfrac{x^2}{1+x^4} \leq \dfrac{1}{2}$ é verdadeira $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

14. Usando o fato que $x^2 + xy + y^2 \geq 0$, mostre que a suposição $x^2 + xy + y^2 < 0$ leva a uma contradição.

15. Uma pirâmide hexagonal regular, com a aresta da base $9\,cm$ e aresta lateral $15\,cm$, foi seccionada por dois planos paralelos à sua base que dividiram sua altura em três partes iguais. Mostre que a parte da pirâmide, compreendida entre esses planos, tem volume, $126\sqrt{3}\,cm^3$.

16. Prove, por indução, que $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \leq n$ para todo $n \geq 3$ e conclua daí que a sequência $1,\ \sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4},\ \ldots$ é decrescente a partir do terceiro termo.

17. Uma indústria de cosméticos deseja embalar sabonetes esféricos de raio $3\,cm$. A embalagem deverá ter formato cilíndrico de forma a acondicionar 3 sabonetes, como mostra a *Figura* (1.7) (vista superior da embalagem aberta).

Figura 1.7:

Mostre que a medida do raio e a altura da embalagem, em cm, deverão ser de, aproximadamente: $6,92$ e 6 respectivamente(. Sugestão: $\sqrt{3} = 1,73$)

18. Verifique, que o máximo número de diagonais de um polígono convexo de n lados é: $N_d = \dfrac{n(n-3)}{2} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n > 3.$

19. Mostre que se um número primo p não divide a a, então $mmc\{\, p,\ a\,\} = 1$.

20. Prove que se m é um inteiro não negativo, então

$$1^m + 2^m + 3^m + \cdots (n-1)^m + n^m \leq n^{m+1}, \quad n \geq 1$$

21. Mostre por indução que para qualquer inteiro $k > 1$ e $n \in \mathbb{N}$:

1. $\dfrac{n^{k+1}}{(k+1)} \geq 1 + 2^k + 3^k + \cdots + (n-2)^k + (n-1)^k$

2. $\dfrac{n^{\frac{k-1}{k}}}{1-\frac{1}{k}} \geq 1 + 2^{-\frac{1}{k}} + 3^{-\frac{1}{k}} + \cdots + (n-1)^{-\frac{1}{k}} + n^{-\frac{1}{k}}$

22. Mostre por indução o seguinte:

1. A desigualdade de Cauchy :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

2. $(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2(n-1)})(1+q^{2n}) = \dfrac{1-q^{2(n+1)}}{1-q}$

23. Define-se o coeficiente binomial $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{m!(m-n)!}$ se $0 \leq m \leq n$. Mostre que:

1. $\begin{pmatrix} n+1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ m-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ se $1 \leq m \leq n$.

2. $(a+b)^n = \sum\limits_{j=0}^{n} \cdot \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} a^{n-j} b^j \qquad \forall\, a,\ b \in \mathbb{R}$.

24. Descobra o erro no seguinte raciocínio por indução:

Seja $P(n)$: *Se a e b são inteiros não negativos tais que $a + b \leq n \quad \Rightarrow \quad a = b$.*

Observe que $P(0)$ é verdadeira.

Sejam a e b inteiros tais que $a + b \leq h + 1$, defina $c = a - 1$ e $d = b - 1$, então $c + d = a + b - 2 \leq h + 1 - 2 \leq h$. A verdade de $P(h)$ implica que $a = b$; isto é $P(h+1)$ é verdadeira.

Portanto $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}$.

25. Mostre que: $\left[1+\dfrac{1}{1}\right] \cdot \left[1+\dfrac{1}{2}\right]^2 \cdot \left[1+\dfrac{1}{3}\right]^3 \cdots \left[1+\dfrac{1}{n}\right]^n = \dfrac{(n+1)^n}{n!} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^+$.

26. Se a, b e n são inteiros positivos, mostre o seguinte:

1. $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ n-1 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a \\ n-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ n \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}^2 + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$

27. Seja $r \neq 1$.

   1. Deduzir que, $a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} = a\left[\dfrac{1-r^n}{1-r}\right]$

   2. Mostre por indução sobre $n \in \mathbb{N}$, $\quad n \geq 1$ que:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} = a\left[\frac{1-r^n}{1-r}\right]$$

28. Mostre que, para qualquer $x > 0$ e para todo número natural n-par, a seguinte desigualdade é verdadeira:

$$x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \geq n + 1$$

29. Mostre que todo número natural podemos escrever como o produto de números primos.

30. A sequência de Fibonacci define-se como segue: $a_1 = 1$, $\quad a_2 = 1$, $\quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Mostre por indução que:

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

31. Na figura ao lado, o triângulo ABC é equilátero, M é ponto médio do lado $\overline{AB}$, o segmento $\overline{MN}$ é perpendicular ao lado $\overline{BC}$ e o segmento $\overline{NP}$ é perpendicular ao lado $\overline{AC}$.

   Sabendo que o lado $\overline{AP} = 12$, calcular a área do triângulo ABC

32. Mostre que, se $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ são números reais tais que $\mid a_1 \mid \leq 1$ e $\mid a_n - a_{n-1} \mid \leq 1$, então $\mid a_n \mid \leq 1$.

33. Mostre que, para todo inteiro positivo n e para $p > 0$ número real a seguinte desigualdade é válida:$(1+p)^n \geq 1 + np + \dfrac{n(n-1)}{2}p^2$.

34. Mostre que: $\mid \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \mid \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \mid a_i \mid$

Capítulo 2

FUNÇÕES

Leonhard Euler

Leonhard Euler *nasceu em Basileia, na Suíça, em* 15 *de abril de* 1707*, e morreu em* 18 *de setembro de* 1783*, em São Petersburgo, Rússia. Foi o matemático mais produtivo do século* $XVII$ *- há quem o considere o matemático mais produtivo de todos os tempos.*

Euler estudou Matemática com Johann Bernoulli. Quando, em 1725*, Nikolaus, filho de Johan, viajou para São Petersburgo, convidou o jovem Euler para segui-lo e se inscrever na Academia, até* 1741*. Em* 1726*, Euler já tinha um pequeno artigo publicação em* 1727*, publicou outro artigo sobre trajetórias recíprocas. Este artigo ganhou o segundo lugar no Grande Premio da Academia de Paris, o que foi um grande feito para o jovem licenciado.*

De 1741 *até* 1766*, Euler esteve na Alemanha, na Academia de Berlim, sob a proteção de Frederico-o-Grande; de* 1.766 *a* 1783 *voltou a São Petersburgo, agora sob a proteção da imperatriz Catarina.*

A vida deste matemático foi quase exclusivamente dedicada ao trabalho nos diferentes campos da Matemática. Embora tivesse perdido um olho, em 1735 *e o outro em* 1766*, nada podia interromper a sua enorme produtividade. Euler, cego, ajudado por uma memória fenomenal, continuou a ditar as suas descobertas. Durante a sua vida escreveu* 560 *livros e artigos; em voda deixou muitos manuscritos, que foram publicados pela Academia de São Petersburgo durante os quarenta e sete anos seguintes à sua morte.*

2.1 Introdução

A aplicabilidade da matemática, enquanto instrumento de estudo dos fenômenos reais, depende essencialmente da sua capacidade de representar esses fenômenos, isto é, da concepção de um modelo matemático que sintetize e relacione as principais características do fenômeno a estudar. Nesses modelos matemáticos, tais relações são hoje representadas por funções. O conceito de função hoje nos pode parecer simples,mas, é o resultado de uma lenta e longa evolução histórica iniciada na antiguidade, quando, por exemplo,

os matemáticos da Babilônia utilizaram tabelas de quadrados e de raízes quadradas e cúbicas, ou quando os Pitagóricos tentaram relacionar a altura do som emitido por cordas submetidas à mesma tensão com o seu comprimento.

Na época antiga, o conceito de função não estava claramente definido. As relações entre as variáveis surgiam de forma implícita e eram descritas verbalmente ou por um gráfico. Só no século $XVII$, quando Descartes[1] e Pierre Fermat introduzem as coordenadas cartesianas, é que se torna possível transformar problemas geométricos em problemas algébricos e estudar analiticamente as funções.

A matemática recebe assim um grande impulso, notadamente pela sua aplicabilidade a outras ciências. A partir de observações ou experiências realizadas, os cientistas passaram a determinar a fórmula ou função que relaciona as variáveis em estudo. A partir daqui todo o estudo se desenvolve em torno das propriedades de tais funções.

É por isso que um dos conceitos mais importantes da matemática é o de função. Em quase todas as partes da ciência o estudo de funções é a parte central da teoria.

2.2 Relações

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$.

Podemos estabelecer uma relação (correspondência) entre os conjuntos A e B de modo que, a cada número em ordem crescente do conjunto A corresponda uma letra na ordem alfabética do conjunto B.

Figura 2.1:

Outro modo de apresentar o esquema da *Figura* (2.1) seria utilizando a forma de par ordenado, isto é: $(1, a)$, $(2, b)$, $(3, c)$ e $(4, d)$.

Observamos que a correspondência estabelecida determina um subconjunto do conjunto produto cartesiano $A \times B$. Este conjunto é denotado como: $\{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$.

Definição 2.1.
Dizemos que S é uma relação de A em B, se S é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$; isto é, $S \subseteq A \times B$.

Assim, uma relação é uma correspondência existente entre conjuntos não vazios.

[1]Rene Descartes (1596 – 1650), criador da geometria analítica, foi um gentil homem, militar, matemático e um dos maiores filósofos de todos os tempos

A correspondência entre os dois conjuntos é dada em termos de pares ordenados, onde o primeiro elemento do par procede do conjunto de partida A e o segundo elemento do par procede do conjunto de chegada B.

Observação 2.1.

1) *Se* $x \in A$ *e* $y \in B$ *e cumpre* $(x, y) \in S$*, então dizemos que* x *está em relação com* y *mediante* S *e denotamos com o símbolo* xSy*.*

2) *Se* S *é uma relação de* A *em* B*, o conjunto* A *é chamado de "conjunto de partida" e o conjunto* B *é chamado de "conjunto de chegada".*

3) *Como o conjunto vazio* $\emptyset \subseteq A \times B$*, então* $\emptyset$ *é uma relação de* A *em* B *e é chamada de "relação nula ou vazia".*

4) *Temos que* S *é uma relação de* A *em* B*, se e somente se* $S \subseteq A \times B$*.*

Os conjuntos de partida e de chegada não necessariamente têm uma estrutura. No entanto, segundo o tipo de estrutura imposta a esses conjuntos, e o tipo de restrição que se impõe à própria relação, obtemos alguns tipos especiais de relações, cada uma delas com um nome específico

Exemplo 2.1.

Sejam os conjuntos $A = \{$ *alunos do* 1^o*ano de Cálculo I* $\}$ *e* $B = \mathbb{N}$*, então com os conjuntos* A *e* B *podemos formar algumas relações como:*

$$S_1 = \{ (x, y) \in A \times B /. \quad x \ \textit{têm} \ y \ \textit{anos} \ \}$$

$$S_2 = \{ (x, y) \in A \times B /. \quad x \ \textit{têm} \ y \ \textit{reais} \ \}$$

Exemplo 2.2.

Sejam os conjuntos: $A = \{3, 4, 5, 6\}$*,* $B = \{1, 2, 3, 4\}$ *e a relação:*

$$S = \{(x, y) \in A \times B /. \quad x = y + 2\}$$

Assim, podemos escrever: $S = \{ (3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4) \}$.

2.2.1 Domínio e imagem de uma relação

Seja S uma relação não vazia de A em B, isto é:

$$S = \{ (x, y) \in A \times B /. \quad x \text{ esta em relação com } y \}$$

Definição 2.2. *Domínio de uma relação.*
O domínio da relação S de A em B é o conjunto dos elementos $x \in A$ para os quais existe um elemento $y \in B$ tal que $(x,\ y) \in S$.

Isto é o domínio de S é o subconjunto de elementos de A formado pelas primeiras componentes dos pares ordenados que pertencem a relação. A notação para indicar o domínio da relação S é $\text{D}(S)$ assim definido:

$$\text{D}(S) = \{\, x \in A\,/.\quad y\ \in B; \quad (x,\ y) \in S\,\}$$

Definição 2.3. *Imagem de uma relação.*
A imagem ou contradomínio da relação S de A em B é o conjunto dos elementos $y \in B$ para os quais existe um elemento $x \in A$ tal que $(x,\ y) \in S$.

Isto é, a imagem de S é o subconjunto de B formado pelas segundas componentes dos pares ordenados que pertencem a relação. A notação para indicar a imagem da relação S é $\text{Im}(S) = \{\, y \in B\,/.\quad x \in A;\ (x,\ y) \in S\,\}$

Exemplo 2.3.

O domínio e imagem da relação do Exemplo (2.2) *são respectivamente:*

$\text{D}(S) = \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ $\qquad\qquad$ $\text{Im}(S) = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

2.2.2 Relações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$

No que segue, utilizaremos relações de A em B onde A e B são subconjuntos do conjunto de números reais $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.4.

Seja S uma relação definida por: $S = \{(x,\ y) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+/.\quad x^2 + y^2 \leq 9\}$

Logo, nossa relação é: $S = \{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2)\}$. *Um diagrama da relação S mostra-se na Figura* (2.2).

Observe, somente são quatro pontos do plano.

Exemplo 2.5.

Seja $\mathcal{T}$ a relação em $\mathbb{R}$ definida como segue: $\mathcal{T} = \{(x,\ y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,/.\quad x^2 + y^2 \leq 9\}$

Um diagrama da relação mostra-se na *Figura* (2.3). Observe, é impossível desenhar um a um os infinitos elementos da relação $\mathcal{T}$; isto acontece pelo fato a relação $\mathcal{T}$ estar definida com subconjuntos de infinitos números reais $\mathbb{R}$.

Figura 2.2:

Figura 2.3:

Existem outros tipos de relações, como mostra a seguinte definição [6].

Definição 2.4.
Sejam k número real constante não nulo, e $n \in \mathbb{N}$.

i) Dizemos que y é diretamente proporcional a x, se $y = kx$; e dizemos que y é inversamente proporcional a x, se $y = k(\frac{1}{x})$.

ii) Dizemos que y é diretamente proporcional á n-ésima potência de x, se $y = k.x^n$; e dizemos que y é inversamente proporcional á n-ésima potência de x, se $y = k(\frac{1}{x^n})$.

iii) Dizemos que z é conjuntamente proporcional a x e y se $z = kxy$

Exemplo 2.6.

De um grupo de 100 *alunos, a razão segundo a qual um boato se espalha é conjuntamente proporcional ao número de alunos que ouviram o boato e ao número de alunos que não ouviram o boato.* **a)** *Se o boato está se espalhando a uma razão de* 5 *alunos por minuto, quando* 30 *o ouviram. Expresse a taxa segundo o qual o boato se está espalhando como função do número de alunos que o ouviram.* **b)** *Quão rápido o boato se espalhou quando* 90 *alunos o ouviram?*

Solução. **a)**

Suponhamos $f(x)$ seja a taxa pelo qual o boato se esta espalhando, quando x alunos o ouviram (logo não ouviram $100 - x$); então $f(x) = kx(100 - x)$.

Quando $x = 30$, temos $f(30) = 5 \quad \Rightarrow \quad 5 = k(30)(100 - 30) \quad \Rightarrow \quad 5 = 2100k \quad \Rightarrow$ $k = \frac{5}{2100} = \frac{1}{420}$.

Logo $f(x) = \frac{x(100 - x)}{420}$. □

Solução. **b)**

Quando $x = 90$, temos $f(90) = \dfrac{1}{420}[90(100 - 90)] = \dfrac{900}{420} = 2,142$, a taxa de crescimento quando 90 alunos o ouviram é $2,142$ ouvintes por minuto.

Exemplo 2.7.

O peso aproximado da banha em um porco é diretamente proporcional a seu peso corporal.

a) *Expresse o número de quilos do peso aproximado da banha de um porco como função de seu peso corporal sabendo que um porco com 98 kg tem um peso aproximado de 32 kg de banha.*

b) *Ache o peso da banha de um porco cujo peso corporal seja 72 kg.*

Solução. (**a**)

Seja $y = f(x)$ o peso aproximado de banha de um porco cujo peso corporal é x kg, sendo o peso da banha diretamente proporcional a seu peso corporal, temos que existe uma constante k tal que $f(x) = kx$; quando $x = 98$ temos $f(98) = 32$, logo $32 = k.(98)$ onde $k = \dfrac{32}{98}$.

Portanto $f(x) = \dfrac{32}{98}x$. □

Solução. (**b**)

Por outro lado, quando $x = 72$ temos $f(72) = 72(\dfrac{32}{98}) = \dfrac{1152}{49} = 23,51$.

Logo o peso da banha é aproximadamente $23,51$ kg.

Exemplo 2.8.

Uma torneira enche um tanque em 12 minutos, enquanto uma segunda torneira gasta 18 minutos para encher o mesmo tanque. Com o tanque inicialmente vazio, abre-se a primeira torneira durante x minutos; ao fim desse tempo, fecha-se essa torneira e abre-se a segunda, a qual termina de encher o tanque em $(x + 3)$ minutos.

Calcular o tempo gasto para encher o tanque.

Solução.

Seja V o volume do tanque, do enunciado, conclui-se que, em 1 minuto a contribuição de cada torneira será $\dfrac{V}{12}$ e $\dfrac{V}{18}$ do volume total do tanque, respectivamente.

Podemos então escrever a relação: $\dfrac{V}{12} \cdot x + \dfrac{V}{18} \cdot (x + 3) = V$; então

$$\frac{x}{12} + \frac{x+3}{18} = 1 \quad \Rightarrow \quad 3x + 2x + 6 = 36$$

assim $x = 6$.

Logo, o tempo para a primeira torneira é $x = 6$ e o tempo para a segunda torneira é 9 minutos.

Conclui-se, que o tempo total gasto, será igual a 15 minutos.

Exemplo 2.9.

Um acidente foi presenciado por $\dfrac{1}{65}$ da população de Patópolis. O número de pessoas que soube do acontecimento após x horas, é dado por: $f(x) = \dfrac{B}{1 + Ca^{-kx}}$, onde B é o total da população.

Sabendo que $\dfrac{1}{9}$ da população soube do acidente após 3 horas. Determine o tempo transcorrido até que $\dfrac{1}{5}$ da população soubesse da notícia.

Solução.

Pelo enunciado do problema, no tempo $x = 0$, o acidente foi presenciado por $\dfrac{1}{65}$ da população B.

Fazendo $x = 0$ e $f(0) = \dfrac{1}{65} \cdot B$, vem: $\dfrac{1}{65} \cdot B = \dfrac{B}{1 + Ca^{-0}}$ de onde $C = 64$.

Também pelo enunciado do problema, quando $x = 3$ temos,

$$f(3) = \frac{1}{9} \cdot B \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{9} \cdot B = \frac{B}{1 + 64a^{-3k}}$$

Daí vem: $9 = 1 + 64a^{-3k}$, logo $\dfrac{1}{8} = a^{-3k}$, de onde

$$2^{-3} = (a^k)^{-3} \quad \Rightarrow \quad a^k = 2 \quad \Rightarrow \quad k = \log_a 2$$

Sabe-se que, para todo número real positivo s, é válida a igualdade $s = a^{\log_a s}$, logo a função dada no enunciado poderá ser escrita como: $f(x) = \dfrac{B}{1 + 2^{-x} \cdot 64}$

Qual o tempo transcorrido até que $\dfrac{1}{5}$ da população soubesse da notícia do acidente?

Ora, basta fazer $f(x) = \dfrac{1}{5} \cdot B$ e calcular o valor respectivo de x.

Teremos então: $\dfrac{B}{5} = \dfrac{B}{1 + 2^{-x} \cdot 64} \quad \Rightarrow \quad 4 = 2^{-x} \cdot 64 \quad \Rightarrow \quad x = 4$

Portanto, o tempo transcorrido até que $\dfrac{1}{5}$ da população soubesse da notícia do acidente foi $x = 4$ horas.

Exemplo 2.10.

Dadas as relações: $f(x) = x + 1$; $\quad g(x) = x - 2$; resolver a equação:

$$| \, f(x) + g(x) \, | = | \, f(x) \, | + | \, g(x) \, |$$

Solução.

Temos: $|(x+1)+(x-2)|=|(x+1)|+|(x-2)| \quad \Leftrightarrow \quad |2x-1|=|x+1|+|x-2|$.

Se $x < -1$, então $-(2x-1) = -(x+1)-(x-2) \quad \Rightarrow \quad -2x+1 = -2x+1$, logo $x \in (-\infty,\ -1)$.

Se $-1 \leq x < \dfrac{1}{2}$, então $-(2x-1) = (x+1)-(x-2) \quad \Rightarrow \quad -2x+1 = 3$, logo $x = -1$.

Se $\dfrac{1}{2} \leq x < 2$, então $(2x-1) = x+1-(x-2) \quad \Rightarrow \quad 2x-1 = 3$, logo $x = 2$ (absurdo!).

Se $2 \leq x$, então $2x-1 = x+1+x-2 \quad \Rightarrow \quad -1 = -1$, logo $x \geq 2$..

Portanto, $x \in (-\infty,\ -1) \cup [2,\ +\infty)$.

Exemplo 2.11.

Determine os valores de a e b na relação $f(x) = ax^2+bx+5$, para os quais seja válida a identidade $f(x+1)-f(x) = 8x+3$.

Solução.

Temos $f(x+1)-f(x) = a(x+1)^2+b(x+1)+5-(ax^2+bx+5) = 8x+3 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x(2a)+a+b = 8x+3 \quad \Rightarrow \quad 2a = 8 \quad \text{ou} \quad a+b = 3$$

Portanto, $a = 4$ e $b = -1$.

Exemplo 2.12.

Determinar o domínio de definição da seguintes relação:

$$R(x) = \sqrt[4]{x^2-4x+12} + \frac{3x^2}{\sqrt[4]{-x-20+x^2}}$$

Solução.

O números reais do domínio da relação R cumpre:

$$x^2-4x+12 \geq 0 \quad \text{e} \quad -x-20+x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-2)^2+8 \geq 0 \quad \text{e} \quad (x-5)(x+4) > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad (-\infty,\ -4) \cup (5,\ +\infty) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{D}(R) = (-\infty,\ -4)(5,\ +\infty)$$

Portanto, o domínio da relação $R(x)$ é $\text{D}(f) = (-\infty,\ -4) \cup (5,\ +\infty)$.

Exercícios 2-1

1. Sejam os conjuntos $A = \{0,\ 1,\ 2\}$ e $B = \{3,\ 2,\ 1\}$, escrever em forma de conjuntos a relação de A em B definida por $x = y$ para $x \in A$ e $y \in B$.

2. Sejam as relações: $f(x) = x$ e $g(x) = x - 2$. Para quais valores de x, é válida a relação: $| f(x) - g(x) |>| f(x) | - | g(x) |$?

3. Suponha os conjuntos $A = \{3,\ 5,\ 8,\ 9\}$ e $B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, escrever em forma de conjuntos a relação de A em B definida por:

   1. $x < y; \quad x \in A$ e $y \in B$ **2.** $x \geq y; \quad x \in A$ e $y \in B$

   3. $x = y; \quad x \in A$ e $y \in B$ **4.** $y + x = 4; \quad x \in A$ e $y \in B$

   5. x é divisível por y; $x \in A$ e $y \in B$

4. Para o exercício anterior, determine o domínio, imagem de cada relação.

5. Construir um desenho, achar o domínio e imagem para cada uma das seguintes relações definidas em $\mathbb{R}$.

   1. $\mathcal{S} = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2/.x - 5y = 0\}$ **2.** $\mathcal{S} = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2/.\quad x = 3^y\}$.

   3. $\mathcal{S} = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2/.\quad y < 2^x\}$. **4.** $\mathcal{S} = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2/.\quad y = \dfrac{1}{x}\}$.

   5. $\mathcal{S} = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2/.\quad (x-2)(y+3) = 0\}$

   6. $\mathcal{S} = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2/.\quad x = 3$ e $-2 < y < 2\}$.

   7. $\mathcal{S} = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2/.\quad y = 2x$ e $x \in [-2,\ 1]\}$.

   8. $\mathcal{S} = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2/.\quad y = \dfrac{9 - x^2}{x^2 - 4}\}$.

   9. $\mathcal{S} = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2/.\quad x = 3$ e $y > 0\}$.

   10. $\mathcal{S} = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2/.\quad y = \dfrac{3x^2 - 8x + 4}{x^2}\}$.

6. Para as relações do exercício anterior, achar as relações inversas, indicar seu domínio e imagem e desenhar-la.

7. Desenhar, logo determine o domínio e imagem das seguintes relações:

   1. $\mathcal{S} = \{\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2\ /.\quad 1 \leq x + y \leq 2\ \}$

   2. $\mathcal{S} = \{\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2\ /.\quad | x | + | y | = 5\ \}$

   3. $\mathcal{S} = \{\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2\ /.\quad | x | + | y | \leq 8\ \}$

   4. $\mathcal{S} = \{\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2\ /.\quad y \leq 2^x$ e $x^2 + y^2 \leq 1\ \}$

8. Sendo $y = | x - 5 | + | 3x - 21 | + | 12 - 3x |$, se $4 < x < 5$, podemos afirmar que a relação é equivalente a:

9. Seja $A = \{ 4, 5, 6 \}$ define-se a relação em $A \times A$ do seguinte modo $(a, b)S(c, d)$ se, e somente se $a + d = b + c$. Achar os elementos da relação S e determine seu domínio.

10. Seja $A = \{ 1, 2, 3 \}$ define-se a relação em $A \times A$ do seguinte modo $(a, b)T(c, d)$ se, e somente se $a - d = b - c$. Achar os elementos da relação T e determine seu domínio.

11. A soma dos ângulos interiores de um polígono regular convexo plano esta em relação com o número de lados. Expressar analiticamente esta relação. Quais valores pode assumir a variável independente?

12. Escrever a relação que expresse a dependência entre o raio r de um cilindro e sua altura h sendo o volume $V = 1$.

13. Determine os valores de a e b na relação $y = S(x)$ onde $S(x) = ax^2 + bx + 5$ para os quais é válida a igualdade $S(x + 1) - S(x) = 8x + 3$.

14. Se $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$ com $x \neq 0$ e $x \neq -1$, então o valor de $S = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(100)$ é:

15. O desenho da relação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada por $f(x) = | 1 - x | -2$, intercepta o eixo das abscissas nos pontos (a, b) e (c, d), com $a < c$. Nestas condições o determine o valor de $E = d + c - b - a$

16. A variável x é inversamente proporcional a y; y é diretamente proporcional a z; z é diretamente proporcional a u, que por sua vez é inversamente proporcional a v. Que dependência existe entre x e v ?

17. A folha de pagamento ($F.P.$) mensal de uma empresa é diretamente proporcional ao número de trabalhadores (T), sabendo que 20 dos trabalhadores tem uma folha de pagamento de R\$3000, 00. **a)** Expresse o valor da folha de pagamento mensal como função do número de trabalhadores; **b)** qual a folha de pagamento para 18 trabalhadores?

18. Seja $a \in \mathbb{R}$ um número fixo, e $f(x) = a^x$ uma relação em $\mathbb{R}$

    1. Mostre que, para $\forall\, x \in \mathbb{R}$ é válida a seguinte expressão: $f(-x) \cdot f(x) = 1$.

    2. Mostre que $f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$

2.3 Funções

O conceito básico de função é o seguinte:

> *"toda vez que temos dois conjuntos e algum tipo de associação entre eles que faça corresponder a todo elemento do primeiro conjunto um único elemento do segundo, ocorre uma função "*

De outro modo, dados os conjuntos A e B, existem diversas relações de A em B, entre estas têm particular importância aquelas que cumprem o seguinte:

Definição 2.5.
Uma relação f de A em B denotado $f : A \longrightarrow B$, é uma " função" se, a todo elemento $x \in A$, corresponde um único elemento $y \in B$.

A definição é conhecida como: "*conceito intuitivo de função*". Se $(a, b) \in f$, escreve-se $f(a) = b$ e se lê "f de a" ou "f aplicado em a".

Observe, por exemplo, os diagramas das relações das *Figuras* (2.4) *e* (2.5)

Figura 2.4:

Figura 2.5:

A relação da *Figura* (2.4) não é uma função, pois existe o elemento 4 no conjunto A associado a mais de um elemento do conjunto B. Preste muita atenção no próximo exemplo:

A relação da *Figura* (2.5) é uma função, pois todo elemento do conjunto A, está associado a somente um único elemento do conjunto B.

2.3.1 Gráfico de uma função

Definição 2.6. *Gráfico de uma função.*
Denomina-se gráfico de uma função ao conjunto:

$$G_f = \{\ (x,\ y)\ /.\quad x \in \mathrm{D}(f) \quad e \quad y = f(x) \in \mathrm{Im}(f)\ \}$$

2.3.2 Definição formal de função

Definição 2.7.
Uma função f definida em A com valores em B e domínio $\text{D}(f) \subseteq A$, é um subconjunto $G_f \subseteq A \times B$ que cumpre as seguintes condições:

i) $\forall\, x \in \text{D}(f), \quad \exists \quad y \in B$ tal que $(x,\ y) \in G_f$.

ii) Se $(x,\ y) \in G_f$ e $(x,\ z) \in G_f$, então $y = z$.

Da parte **i)** podemos afirmar que a todo elemento $x \in \text{D}(f)$ corresponde pelo menos um elemento $y \in B$ tal que $(x,\ y) \in G_f$; e de **ii)** o elemento y associado ao elemento x é único.

2.3.3 Domínio e imagem de uma função

Da definição de função, "*toda função é uma relação, mas nem toda relação é uma função*", o domínio e imagem de uma função são respectivamente o domínio e imagem da relação que ela representa.

O domínio de uma função $f : A \longrightarrow B$ é sempre o próprio conjunto de partida, ou seja, $\text{D}(f) = A$. Se um elemento $x \in A$ estiver associado a um elemento $y \in B$, dizemos que y é a imagem de x (indica que $y = f(x)$ e lê-se "y é igual a f de x").

Com base nos diagramas das *Figuras* (2.4) -(2.5) acima, concluímos que existem duas condições para que uma relação f seja uma função:

1º O domínio deve sempre coincidir com o conjunto de partida, ou seja, todo elemento de A é ponto de partida de flecha. Se tivermos um elemento de A do qual não parta flecha, a relação não é função.

2º De cada elemento de A deve partir uma única flecha. Se de um elemento de A partir mais de uma flecha, a relação não é função.

Observação 2.2.

- Como x e y têm seus valores variando nos conjuntos A e B, recebem o nome de *variáveis*.

- A variável x é chamada "*variável independente* " e a variável y, "*variável dependente*", pois para obter o valor de y dependemos de um valor de x.

- Uma função f fica definida quando são dados seu domínio (conjunto A), seu contradomínio (conjunto B) e a lei de associação $y = f(x)$.

2.3.4 Obtenção do domínio de uma função

O domínio de uma função em $\mathbb{R}$ é o subconjunto de $\mathbb{R}$ no qual o número $y = f(x) \in \mathbb{R}$. Temos alguns exemplos de funções:

1) Seja $f(x) = \sqrt{3x-6}$

Do fato ser possível em $\mathbb{R}$ quando $3x - 6 \geq 0$, então o domínio de definição para a função é: $D(f) = \{\, x \in \mathbb{R} \,/. \quad x \geq 2 \,\}$.

2) Quando $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}}$

Como $\sqrt{x-2}$ só é possível para $x \geq 2$ e, o denominador é possível para $x < 3$ então para a função f estar bem definida, $D(f) = \{\, x \in \mathbb{R} \,/. \quad 2 \leq x < 3 \,\}$.

3) Consideremos a função $g(x) = \dfrac{7}{x-1}$.

Como o denominador $x - 1$ não pode ser nulo (não existe divisão por zero), então: $D(g) = \{\, x \in \mathbb{R} \,/. \quad x \neq 1 \,\}$.

Exemplo 2.13.

Seja $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *(isto significa que o domínio e o contradomínio são os números naturais) definida por* $y = x + 2$. *Então temos que:*

De modo geral, a imagem de x *através de* f *é* $x + 2$, *ou seja:* $f(x) = x + 2$.

- *A imagem de* 1 *através de* f *é* 3, *ou seja,* $f(1) = 1 + 2 = 3$.
- *A imagem de* 2 *através de* f *é* 4, *ou seja,* $f(2) = 2 + 2 = 4$. □

Lembre, em uma função $f : A \longrightarrow B$, os elementos de B que são imagens dos elementos de A através da relação de f e formam o "*conjunto imagem de f*" ou "*contradomínio de f*".

Exemplo 2.14.

Sejam $A = \{\, 1,\ 3,\ 4,\ 5 \,\}$ *e* $B = \{\, 2,\ 4,\ 5,\ 7 \,\}$ *e* $f = \{\, (1,\ 2),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 7) \,\}$.

O diagrama correspondente da função f mostra-se na *Figura* (2.6).

Temos que: $f(1) = 2,\ f(3) = 4,\ f(4) = 5,\ f(5) = 7$.

$\mathrm{Im}(f) = B$ e $D(f) = A$

$G_f = \{\, (1,\ 2),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 7) \,\}$ □

Exemplo 2.15.

Considere a função $f : A \longrightarrow B$ *representada no diagrama da Figura* (2.7), *determine:* **a)** *o domínio* $D(f)$; **b)** $f(1)$, $f(-3)$, $f(3)$ *e* $f(2)$; **c)** *o conjunto imagem* $\mathrm{Im}(f)$; **d)** *a lei associativa.*

Solução.

Figura 2.6:

Figura 2.7:

a) O domínio é igual ao conjunto de partida, ou seja, $\text{D}(f) = A$.

b) $f(1) = 1,\ f(-3) = 9,\ f(3) = 9$ e $f(2) = 4$.

c) O conjunto imagem é formado por todas as imagens dos elementos do domínio, portanto: $\text{Im}(f) = \{\ 1,\ 4,\ 9\ \}$.

d) Como $1^2 = 1,\ (-3)^2 = 9,\ 3^2 = 9$ e $2^2 = 4$, temos $y = x^2$. □

2.3.5 Construção do gráfico cartesiano de uma função

Um sistema de coordenadas cartesianas consiste em um par de retas de números reais, as quais se interceptam formando ângulo reto, como mostra a *Figura* (2.8); a reta horizontal é chamada "eixo-x" ou "*eixo das abscissas*" e a reta vertical é chamada de "eixo-y" ou "*eixo das ordenadas*".

Figura 2.8: Plano cartesiano

Para construir o gráfico de uma função $y = f(x)$, basta atribuir valores do domínio à variável x e, usando a sentença matemática que define a função, calcular os correspondentes valores para $y = f(x)$. Por exemplo, se desejamos construir o gráfico da função definida por $y = 2x-1$. Primeiro observe que o domínio são todos os números reais, logo, podemos considerar $x = 2$, $x = 4$, $x = 6$, $x = 8$, e assim calculamos os respectivos valores para y, como indica a tabela:

Identificamos os pontos encontrados no plano cartesiano, como mostra a *Figura* (2.9).

O gráfico da função é uma reta que passa pelos quatro pontos encontrados. Basta traçar a reta, e o gráfico estará construído.

Para desenhar o gráfico de uma reta são necessários apenas dois pontos. No exemplo

x	2	4	6	8	10	11
y	3	7	11	15	19	21

Figura 2.9:

acima, escolhemos 6 pontos. Em verdade é suficiente escolher dois elementos do domínio, encontrar suas imagens e, logo após, traçar a reta que passa por esses dois pontos.

Segundo a *Definição* (2.5), toda função $f : A \longrightarrow B$ tem como domínio $\text{D}(f) = A$; porém, quando dizemos que temos uma função de A em B e achamos seu domínio $\text{D}(f) \subseteq A$, observe, temos uma relação de A em B, e ao calcular seu domínio $\text{D}(f)$, a transformamos em uma função (sempre que for possível) de $\text{D}(f)$ em B; isto ocorre com frequência quando temos uma relação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e falamos de "*função de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$".

Exemplo 2.16.

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se,} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{se,} \quad x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

determine: **a)** $f(0,12)$ **b)** $f(\frac{1}{2})$ **c)** $f(\sqrt{2})$ **d)** $f(0,333333...)$

Solução.

a) $f(0.12) = f(\frac{12}{100}) = 1$ **b)** $f(\frac{1}{2}) = 1$

c) $f(\sqrt{2}) = -1$ **d)** $f(0,333333...) = f(\frac{3}{9}) = 1$

Exemplo 2.17.

Dada a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *(ou seja, o domínio e o contradomínio são os números reais) definida por* $f(x) = x^2 - 5x + 6$*, calcule:* **a)** $f(2)$, $f(3)$ *e* $f(0)$*;* **b)** *o valor de* x *cuja imagem seja* 2.

Solução. **a)**

$$f(2) = 2^2 - 5(2) + 6 = 0; \qquad f(3) = 3^2 - 5(3) + 6 = 0 \ \text{ e } \ f(0) = 6 \qquad \square$$

Solução. **b)**

Calcular o valor de x cuja imagem vale 2 equivale a resolver a equação $f(x) = 2$, ou seja, $x^2 - 5x + 6 = 2$.

Utilizando a fórmula de Bhaskara, encontramos as raízes 1 e 4.

Portanto, os valores de x cuja imagem é 2 são $x = 1$ e $x = 4$.

Exemplo 2.18.

Seja a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:* $f(x) = x^2 - 3x + 2$. *Determine:*

a) $f(-3)$ **b**) $f(x^2)$ **c**) $f(y - z)$ **d**) $f(2x - 3) - f(x + 3)$

e) $f(a^2)$ **f**) $f(x + h)$ **g**) $f(f(x))$ **h**) $f(x^2 - 3x + 2)$

Solução.

a) $f(-3) = (-3)^2 - 3(-3) + 2 = 20$

b) $f(x^2) = [x^2]^2 - 3[x^2] + 2 = x^4 - 3x^2 + 2$

c) $f(y - z) = (y - z)^2 - 3(y - z) + 2 = y^2 + z^2 - 2yz - 3y + 3z + 2$

d)
$$f(2x - 3) - f(x + 3) = [2x - 3]^2 - 3[2x - 3] + 2 - [x + 3]^2 - 3[x + 3] + 2 =$$
$$= [4x^2 - 18x + 20] - [x^2 + 3x + 2] = 3x^2 - 21x + 18$$

e) $f(a^2) = [a^2]^2 - 3[a^2] + 2 = a^4 - 3a^2 + 2$

f) $f(x + h) = (x + h)^2 - 3(x + h) + 2 = x^2 + h^2 + 2hx - 3x - 3h + 2$

g) $f(f(x)) = [f(x)]^2 - 3[f(x)] + 2$

h) $f(x^2 - 3x + 2) = [x^2 - 3x + 2]^2 - 3[x^2 - 3x + 2] + 2 = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x$ □

2.3.6 Função: Injetiva. Sobrejetiva. Bijetiva

Definição 2.8. *Função injetiva.*

Dizemos que uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B$ *é injetiva, se a elementos distintos do* $D(f) \subseteq A$ *correspondem imagens distintas; isto é para qualquer* $x_1,\ x_2 \in D(f)$ *com* $x_1 \neq x_2$ *corresponde* $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Esta *Definição* (2.8) é equivalente a:

Dizemos que uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B$ *é "injetiva" se, para qualquer* $x_1,\ x_2 \in \mathrm{D}(f)$ *com* $f(x_1) = f(x_2)$ *temos que* $x_1 = x_2$.

Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x$ é injetiva pois se $x_1 \neq x_2$ então $3x_1 \neq 3x_2$, portanto $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definição 2.9. *Função sobrejetiva.*
Dizemos que uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B$ é sobrejetiva se, e somente se, seu conjunto imagem for igual ao contradomínio.

Isto é, para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$; logo, a função $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B$ é sobrejetiva se $\text{Im}(f) = B$.

Definição 2.10. *Função bijetiva.*
Dizemos que uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva entre A e $\mathbb{R}$ quando ela é sobrejetiva e injetiva (ambas as condições).

Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = 3x$ é injetiva, como vimos no exemplo anterior. Ela também é sobrejetiva, pois $\text{Im}(f) = B = \mathbb{R}$.

Logo, a função f é bijetiva.

A função $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $y = x + 5$ não é sobrejetiva. Pois $\text{Im}(g) = \{5, 6, 7, 8, \cdots\}$ e o contradomínio é $\mathbb{N}$, esta função é injetiva, pois valores diferentes de x têm imagens distintas.

Então essa função não é bijetiva.

Observação 2.3.

- *É sinônimo de função injetiva: Função injetiva. Função unívoca*
- *É sinônimo de função sobrejetiva: Função sobrejetora.*
- *É sinônimos de função bijetiva: Função biunívoca. Correspondência biunívica. Bijeção. Função um-a-um.*

Exemplo 2.19.

Considere os conjuntos $A = \{5, 6, 7, 8\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 9\}$ definida pela equação $y = x - 4$.

Para cada $a \in A$ fica associado um único $y \in B$.

Considerando $y = f(x) = x - 4$ temos $f(5) = 1,\ f(6) = 2,\ f(7) = 3$ e $f(8) = 4$.

Esta função é injetiva, não é sobrejetiva (para o elemento $9 \in B$, não existe um elemento em A), logo não é bijetiva.

Exemplo 2.20.

a) *Sejam $A = \{1, 3, 9, 10\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$ e $f : A \to B$ a função definida por $f(1) = 2,\ f(9) = 3,\ f(3) = 4$ e $f(10) = 5$ é função bijetiva.*

b) *A função* $h = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ /.\quad y = x^2 + 1;\quad -3 < x \leq 3\ \}$ *não é injetiva.*

2.3.7 Função real de variável real

Definição 2.11.
Sejam A *e* B *subconjuntos não vazios de números reais, uma função* $f : A \longrightarrow B$ *é denominada função real de variável real ou função de uma variável real a valores reais.*

Daqui por diante, todas as funções estudadas serão reais de uma variável real.

Exemplo 2.21.

Seja $f = \{\ (x,\ y) \in A \times B\ /.\ y = 2x + 1\ \}$ onde $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{N}$, então temos:

$$f = \{\ (-\frac{1}{2},\ 0),\ (0,\ 1),\ (\frac{1}{2},\ 2),\ (1,\ 3),\ (\frac{3}{2},\ 4),\ \cdots,(\frac{n-1}{2},\ n)\ \}$$

neste caso o domínio $\text{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}/.\quad x = \dfrac{n-1}{2}\quad n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ e a imagem $\text{Im}(f) = B$. A *Figura* (2.10) mostra o gráfico da função f, são pontos isolados.

Figura 2.10:

Figura 2.11:

Exemplo 2.22.

Seja $g : A \longrightarrow B$ *uma função definida por:*

$$g(x) = \begin{cases} 0,5, & se,\quad 0 \leq x < 2 \\ 0,5 + x, & se,\quad 2 \leq x \leq 4 \\ -1, & se,\quad x < 0,\ ou\, x > 4 \end{cases}$$

onde A *e* B *são subconjuntos de* $\mathbb{R}$.

Temos $D(f) = A = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(g) = \{ -1 \} \cup [1, 4]$.

O gráfico da função $g(x)$ mostra-se na *Figura* (2.11).

Exemplo 2.23.

Seja $h(x) = x^3$ *, determine o valor da expressão:* $\dfrac{h(b) - h(a)}{b - a}$ *sendo* $(a - b) \neq 0$.

Solução.

Determinamos os valores da função dada para $x = b$ e $x = a$; isto é $h(b) = b^3$ e $h(a) = a^3$. Assim,

$$\frac{h(b) - h(a)}{b - a} = \frac{b^3 - a^3}{b - a} = \frac{(b - a)(a^2 + ab + b^2)}{b - a} = a^2 + ab + b^2$$

o último acontece pelo fato $a \neq b$.

Observação 2.4.

No que segue, a função terá como regra de correspondência $x \longmapsto f(x)$*, sem explicitar seu domínio* $D(f)$ *e imagem* $\text{Im}(f)$.

Fica estabelecido que o domínio é um subconjunto do conjunto de números reais $\mathbb{R}$*, para o qual* $f(x)$ *é um número real.*

O gráfico das funções será feito num sistema de coordenadas cartesianas.

Exemplo 2.24.

Determine o domínio e imagem da função $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

Solução.

Observe, $f(x) = x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4$, sendo $(x - 3)^2$ sempre positivo, então $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq -4$.

Logo $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = [-4, +\infty)$.

Exemplo 2.25.

a) Para quais funções $f(x)$ existe uma função $g(x)$ tal que $f(x) = [g(x)]^2$?

b) Para que função $f(x)$ existe uma função $g(x)$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$?

c) Para quais funções $b(x)$ e $c(x)$ podemos achar uma função $f(x)$ tal que:

$$[f(x)]^2 + b(x)[f(x)] + c(x) = 0$$

para todos os números reais x ?

d) Que condições satisfazem as funções $a(x)$ e $b(x)$ se existe uma função $f(x)$ tal que $a(x)f(x) + b(x) = 0$ para todos os números reais x ?

Solução.

a) Como $f(x) = [g(x)]^2 \geq 0$, então isto é possível somente para as funções $f(x) \geq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Considerando que estamos trabalhando com funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, podemos intuitivamente entender $f(x)$ como sendo um número real; assim $g(x)$ existe somente quando $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ exista, isto somente é possível se $f(x) \neq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

c) De $[f(x)]^2 + b(x)[f(x)] + c(x) = 0$, pela fórmula de Bhaskara segue:

$$f(x) = \frac{-b(x) \pm \sqrt{[b(x)]^2 - 4 \cdot c(x)}}{2}$$

logo existe $f(x)$ quando $[b(x)]^2 \geq 4 \cdot c(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

d) Para o caso $a(x) \neq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, existe uma única função $f(x) = \dfrac{-b(x)}{a(x)}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ com esta condição. Quando a função $b(x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$ então $a(x) = 0$.

Observe, se $a(x) = 0$ para algum $x \in \mathbb{R}$, então podemos eleger arbitrariamente $f(x)$ de modo que existem infinitas funções que cumprem esta condição.

Exemplo 2.26.

Um estudo sobre a eficiência de operários do turno da manha de uma determinada fábrica, indica que um operário médio que chega ao trabalho as 8 horas da manha, monta x horas após de iniciado seu trabalho $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$ rádios transistorizados. **a)** *Quantos rádios o operário terá montado até as 10 h da manha?* **b)** *Quantos rádios o operário terá montado entre as 9 e 10 horas da manha?*
Solução.

a) Temos que, das $08:00$ até as $10:00$ o operário trabalhou $x = 2$ horas, logo ele montou $f(2) = -2^3 + 6(2^2) + 15(2)$, então $f(2) = 46$.

Portanto, ele montou 46 aparelhos.

b) Entre as $08:00$ e $09:00$ da manha ele montou $f(1) = -1^3 + 6(1^2) + 15(1) = 20$ aparelhos; logo entre as $09:00$ e $10:00$ ele montou $46 - 20$ aparelhos, isto é 26.

Exemplo 2.27.

Devemos construir uma caixa aberta sem tampa com um pedaço retangular de cartolina de $60 \times 86\, cm$ cortando-se uma área de $x\, cm^2$ em cada canto e dobrando-se os lados como indica a Figura (2.9). Expresse o volume da caixa em função de x.
Solução.

Figura 2.12:

As dimensões da caixa são: altura x cm, e a base é um retângulo de lados $(60-2x)$ e $(86-2x)$ como observamos na *Figura* (2.12).

Logo o volume é $V = x(60-2x)(86-2x)$; isto é $V = 4x(30-x)(43-x)$

Exemplo 2.28.

Supõe-se que $f(x) = \dfrac{900x}{400-x}$ *seja o número necessário de homens - hora para distribuir panfletos entre* x *por cento de moradores de uma cidade.* **a)** *Determine o domínio da função.* **b)** *Para qual valor de* x *o problema tem interpretação prática?* **c)** *Quantos homens-hora são necessários para distribuir panfletos entre os primeiros* 50% *de moradores?* **d)** *Quantos homens-hora são necessários para distribuir panfletos à comunidade inteira.* **e)** *Que porcentagem de moradores da cidade recebeu panfletos, quando o número de homens-hora foi de* 100 *?*

Solução.

a) Observando a função $f(x) = \dfrac{900}{400-x}$ como uma relação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, seu domínio são todos os números reais exceto $x = 400$.

b) Sendo x uma variável que representa porcentagem, o problema tem aplicação prática quando $0 \leq x \leq 100$.

c) Quando $x = 50$, então $f(50) = \dfrac{(900)(50)}{400-50} = \dfrac{900}{7} = 128,59$ homens-hora; isto é aproximadamente 129 homens.

d) A comunidade inteira representa o 100%; logo $x = 100$, e $f(100) = \dfrac{(900)(100)}{400-100} = 300$. São necessários 300 homens.

e) Para calcular x quando $f(x) = 100$ temos, $100 = \dfrac{900x}{400-x} \quad \Rightarrow \quad (400-x) = 9x \quad \Rightarrow$ $x = 40$. Recebeu o 40% da população.

Exemplo 2.29.

Certo Banco A, cobra R$30.00 por talão de cheques e R$5.00 para cada cheque usado. Outro Banco B cobra R$10.00 por talão de cheque e R$9.00 para cheque usado. Calcular ou critério para decidir em que Banco você abrirá sua conta.
Solução.

Suponha sejam usadas x folhas de cheque, então temos:

Gastos no Banco $A:$ $R\$30.00 + (R\$5.00)x$.

Gastos no Banco $B:$ $R\$10.00 + (R\$9.00)x$.

Fazendo a desigualdade, $R\$30.00 + (R\$5.00)x < R\$10.00 + (R\$9.00)x$ temos $5 < x$ isto significa que se usamos mais de 5 folhas é melhor os serviços do Banco A; se usamos $x = 5$ folhas não faz diferença e se usamos menos de 5 folhas é melhor o Banco B.

Exemplo 2.30.

Mostre que, se $f(x) = kx + b$ e os números a_1, a_2 e a_3 constituem uma progressão aritmética, os números $f(a_1)$, $f(a_2)$ e $f(a_3)$ também constituem uma progressão aritmética.
Solução.

Suponhamos $a_1 = a - r$, $a_2 = a$, e $a_3 = a + r$ então $f(a_1) = f(a - r)$, $f(a_2) = f(r)$, e $f(a_3) = f(a + r)$, logo:

$f(a_1) = k(a - r) + b = (ka + b) - kr;$

$f(a_2) = kr + b = (kr + b);$

$f(a_3) = k(a + r) + b = (ka + b) + kr.$

Portanto os números $f(a_1)$, $f(a_2)$, e $f(a_3)$ constituem uma progressão aritmética de razão kr.

Exemplo 2.31.

O volume de uma lata cilíndrica é de 24π centímetros cúbicos. O metal utilizado para a tampa e para a base custa R$3,00 por cm^2 e o material empregado na parte lateral custa R$2,00 por cm^2. Calcular o custo de produção da lata em função de seu raio.
Solução.

Suponha o raio r da base e h a altura, logo seu volume é dado por $\pi r^2 h$ e da condição do problema resulta $24\pi = \pi r^2 h$ onde $h = \dfrac{24}{r^2}$.

A área total do cilindro é dada pela expressão:

$$\text{área total} = 2(\text{área da base}) + (\text{área lateral})$$

Por outro lado, sabemos que: *área da base* $= \pi r^2$ e

$$\text{área lateral} = 2\pi rh = 2\pi r\frac{24}{r^2} = \frac{48}{r}\pi$$

Seja $C(r)$ o custo de produção; então:

$$C(r) = (\text{R\$}3,00).2(\text{área da base}) + (\text{R\$}2,00)\cdot(\text{área lateral}) =$$

$$= (\text{R\$}6,00)\cdot(\pi r^2) + (\text{R\$}2,00)\cdot(\frac{48}{r}\pi) \quad \text{isto é} \quad C(r) = 6\pi r^2 + \frac{96}{r}\pi\text{reais}$$

Exemplo 2.32.

Um fabricante de panelas pode produzir uma determinada panela a um custo de $R\$10$ *por unidade. Esta estimado que se o preço de venda for de* x *cada panela, então o número de panelas vendidos por mês sería* $(300 - x)$. **a)** *expresse o lucro mensal do fabricante como função de* x. **b)** *Utilize o resultado da parte a) para determinar o lucro se o preço de venda for* $R\$35$ *cada.*

Solução.

a) O lucro podemos obter subtraindo da receita total $R(x)$, o custo total $C(x)$; isto é: receita total $R(x) = x(300-x)$ e custo total $C(x) = 10(300-x)$; logo o lucro mensal $L(x)$, é $L(x) = x(300-x) - 10(300-x) = (x-10)(300-x)$.

b) Quando $x = 35$ reais, o lucro $L(35) = 6.625$ reais.

Exemplo 2.33.

Expressar a dependência funcional $f(x)$ *entre o cateto de um triângulo retângulo e o comprimento* x *do outro cateto, sendo a hipotenusa constante igual a* 5.

Solução.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos da *Figura* (2.13):

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

logo, $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$, isto é $\overline{BC}^2 = 5^2 - x^2$ onde: $\overline{BC} = \sqrt{25 - x^2}$.

Assim, $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

Exemplo 2.34.

Expressar a área de um trapézio isósceles de base a e b *como função do ângulo* α *da base* a.

Solução..

Figura 2.13:

Figura 2.14:

Pelo Teorema de Pitágoras, a altura do trapézio da *Figura* (2.14) é $\overline{BE}$, da definição da tangente de um ângulo, temos que, $\tan\alpha = \dfrac{\overline{BE}}{\overline{AE}}$; dos dados do problema vem que $\overline{AD} = a$ e $\overline{BC} = b$, logo $\overline{AE} = \dfrac{a-b}{2}$.

Área do trapézio $= \left[\dfrac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\right] \times \overline{BE} = \left[\dfrac{a+b}{2}\right]\cdot\left[\dfrac{a-b}{2}\right]\tan\alpha$

Portanto, a área do trapézio é: $f(\alpha) = \left[\dfrac{a^2-b^2}{4}\right]\tan\alpha$.

Exemplo 2.35.

Sejam $a,\ b \in \mathbb{R}$ tais que $a^2+b^2 = 1$ e $a \neq 1$. Definimos $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{b}{a+1}$. Sabendo que $E = \cos\alpha + \text{sen}\alpha > 0$, mostre que $E = \sqrt{1+2ab}$.

Solução.

Tem-se

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\text{sen}\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\sqrt{(1+\cos\alpha)^2}} = \frac{\text{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}$$

logo $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{b}{1+a} = \dfrac{\text{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}$

Sabendo que $a^2+b^2 = 1$, podemos supor que $\cos\alpha = a$ e $\text{sen}\alpha = b$ e como $E = \cos\alpha + \text{sen}\alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad E = a+b = \sqrt{(a+b)^2} = \sqrt{a^2+b^2+2ab}$.

Portanto, $E = \sqrt{1+2ab}$.

Exercícios 2-2

1. Seja $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ interpretar o seguinte:

   1. $f(f(x))$ **2.** $f(cx)$ **3.** $f(x+y)$ **4.** $f(x)+f(y)$

   5. Determine números c de modo que existam x tais que $f(cx) = f(x)$.

   6. Determine números c, tais que $f(cx) = f(x)$ para valores distintos da variável x.

2. Determine o domínio das seguintes funções:

   1. $f(x) = \sqrt{1-x}$ **2.** $g(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x}}$ **3.** $h(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$

   4. $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$ **5.** $h(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-2}$

3. Calcular $f(a)$ para as seguintes funções:

   1. $f(x) = x^2 + 6x - 2$ $a = -2$ **2.** $f(x) = \dfrac{x+1}{3-x^5}$ $a = 0$

   3. $f(x) = \sqrt{5x^2+11}$ $a = -\dfrac{1}{3}$ **4.** $f(x) = \dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-5x+1}$ $a = 1$

   5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|\, x-2 \,|}{x-2}, & \text{se,} \quad x \neq 2 \\ 1, & \text{se,} \quad x = 2 \end{cases}$ $a = -2$

4. Desenhar o gráfico das seguintes funções:

   1. $g(x) = f(x) + c$ **2.** $g(x) = f(x+c)$ **3.** $g(x) = c.f(x)$

   4. $g(x) = f(cx)$ **5.** $g(x) = f(1/x)$ **6.** $g(x) = f(|\, x \,|)$

   7. $g(x) = \min.\{f(x),\ 0\}$ **8.** $g(x) = \max.\{f(x),\ 0\}$

5. Sejam os conjuntos $A = [1,\ 4]$, $B = [-1,\ 1]$ e $C = [-3,\ 1]$ e considere as funções $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ e $h : C \longrightarrow \mathbb{R}$, assim definidas: *a cada número x corresponde seu quadrado x^2*. Quais das funções são injetoras?

6. A função constante $f(x) = k$, pode ser injetiva? E, sobrejetiva?

7. Sabe-se que -2 e 3 são raízes de uma função quadrática. Se o ponto $(-1,\ 8)$ pertence ao gráfico dessa função, então:

8. Num circuito a tensão vá decrescendo uniformemente (conforme a lei linear). Ao inicio do experimento a tensão era igual a $12V$ e ao final do mesmo experimento,

que duro $8sg$, a tensão baixo até $6,4V$. Expressar a tensão V como função do tempo t e construir o gráfico para esta função.

9. Uma esfera de raio R tem inscrito um cone reto. Achar a dependência funcional entre a área da superfície lateral S do cone e sua geratriz x. Indicar o domínio de definição de esta função.

10. Certa quantidade de gás ocupo o volume de $107cm^3$ à temperatura de 20^oC; para uma temperatura de 40^oC o volume chegou a ser igual a $114cm^3$:

    1. Aplicando a lei de Gay-Lussac formar a equação que expresse a dependência entre o volume V do gás e a temperatura T^oC.

    2. Qual seria o volume a 0^oC?

11. O dono de um restaurante resolveu modificar o tipo de cobrança, misturando o sistema a quilo com o preço fixo. Ele instituo o seguinte sistema de preço para as refeições:

Até $300g$	$R\$3.00$	por refeição
Entre $300g$ e $1kg$	$R\$10.00$	por quilo
Acima de $1kg$	$R\$10.00$	por refeição

    Representar graficamente o preço das refeições nesse restaurante.

12. A medida da temperatura em graus Fahrenheit é uma função linear da medida em graus centígrados:

    1. Escrever a equação de esta função (lembre que $0^oC = 32^oF$ e $100^oC = 212^oF$).

    2. Utilizar a função obtida no item anterior para transformar 15^oC a graus Fahrenheit.

13. O valor da função de argumento inteiro $u = f(n)$ é igual ao número de divisores inteiros do argumento n distintos de 1 e do mesmo n. Formar a tabela dos valores de u para $1 \leq n \leq 18$.

14. Uma bola foi abandonada do teto de um edifício. A altura da bola em metros depois de t segundos é dada pela função $H(t) = -16t^2 + 256$.

    1. Em que altura estará a bola depois de 2 segundos ?

    2. Que distância terá recorrido a bola no 3^o segundo ?

    3. Qual é a altura do edifício ?

    4. Depois de quantos segundos a bola chegará ao solo ?

2.4 Funções especiais

2.4.1 Função afim

Função afim $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é aquela definida por $f(x) = ax + b \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes reais não nulas; o domínio da função $\text{D}(f) = \mathbb{R}$ e a imagem $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$; seu gráfico é uma reta oblíqua ao eixo das abscissas (eixo-x) como mostra a *Figura* (2.15); ela intercepta o eixo-y no ponto $(0,\ b)$ e o eixo-x no ponto $(-\dfrac{b}{a},\ 0)$.

Exemplo 2.36.

A função $f(x) = 3x + 5$ *é uma função afim, seu domínio* $\text{D}(f) = \mathbb{R}$ *e sua imagem o conjunto* $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$*.*

Figura 2.15: Figura 2.16:

Exemplo 2.37.

A função $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ *é uma forma disfarçada da função afim* $g(x) = x + 3$*.*

Seu domínio é $\text{D}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$ *e* $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - \{6\}$*.*

2.4.2 Função constante

Quando, na função afim, temos $a = 0$ então a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada "*função constante*" sendo definida por $f(x) = b \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, onde b é um número real constante.

O domínio $\text{D}(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \{\, b \,\}$ e o gráfico é uma reta horizontal como mostra a *Figura* (2.16).

Observe, a função associa a todo $x \in \mathbb{R}$ um mesmo número real b.

Exemplo 2.38.

Seja $y = f(x)$ *onde* $f(x) = 5$*, então* $y = 5$ *representa a função constante, é uma reta paralela ao eixo das abscissas a cinco unidades de distância superiormente.*

2.4.3 Função identidade em $\mathbb{R}$

Quando, na função afim, temos $a = 1$ e $b = 0$, resulta a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e, é chamada "*função identidade*" definida por $f(x) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

O domínio da função $D(f) = \mathbb{R}$ e a imagem $Im(f) = \mathbb{R}$; o gráfico é uma reta oblíqua, que faz ângulo de 45^o com o eixo das abscissas, isto é, o gráfico da função identidade é uma reta que contém as bissetrizes do 1^o e 3^o quadrantes e que passa pela origem, como mostra a *Figura* (2.17).

Figura 2.17: Figura 2.18:

2.4.4 Função linear

Se, na função afim a constante $b = 0$, tem-se a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ e chamada "*função linear*"; o domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$, seu gráfico é uma reta oblíqua que não necessariamente faz ângulo de 45^o graus com o eixo-x, como mostra a *Figura* (2.18). É uma reta que não é paralela a nenhum dos eixos; o número $a \neq 0$ é o coeficiente angular dessa reta.

Esta função que estabelece entre x e y uma relação tal que $\dfrac{y}{x} = a$ é constante. Expressamos a relação por $y = a \cdot x$, onde "a" constante, dizemos que a variação de ´´y" é diretamente proporcional a variação de "x".

Sejam $x_1,\ x_2 \in D(f), \quad a,\ b \in \mathbb{R}$, a função linear possui as seguintes propriedades:

Aditividade: $\quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$;

Homogeneidade: $\quad f(a \cdot x_1) = a \cdot f(x_1)$.

$$f(a \cdot x_1 + b \cdot x_2) = a \cdot f(x_1) + b \cdot f(x_2)$$

A função afim $f(x) = ax + b$, onde a e b são constantes, é a equação de uma reta no plano $\mathbb{R}^2$; seu domínio e imagem são todos os números reais salvo alguma restrição, e não satisfaz estas duas últimas propruedades.

2.4.5 Equação de uma reta

Existem situações nas quais a taxa de variação de uma quantidade com relação a outra é constante. Por exemplo, suponhamos que para fabricar um determinado produto tenhamos a pagar R$20, 00, além de uma despesa fixa semanal de R$300, 00. Então se x unidades forem produzidas por semana e y reais for o custo total semanal para o fabricante; então $y = 20x + 300$.

Soluções para esta equação são dadas na seguinte tabela:

x	0	10	20	30	40
$y = 20x + 300$	300	500	700	900	1500

A relação dada no exemplo precedente representa a equação de uma reta; em geral, dados dois pontos $P(x_1,\ y_1)$ e $Q(x_2,\ y_2)$ de uma reta, para determinar sua equação no plano $\mathbb{R}^2$ procedemos do seguinte modo:

Considere os pontos $P(x_1,\ y_1)$ e $Q(x_2,\ y_2)$ do triângulo PRQ como mostra a *Figura* (2.19).

A tangente do ângulo $\widehat{PQR}$ é dada por: $\tan(\widehat{PQR}) = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ este valor da tangente é denominado "coeficiente angular da reta que passa pelos pontos PQ"; e denotada por: $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

Figura 2.19:

Se $(x,\ y)$ é um ponto quaisquer da reta que passa por P e Q, das relações geométricas para triângulo retângulo temos que: $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ isto é $\quad y - y_1 = m(x - x_1)$.

Portanto, a equação da reta L, que passa pelos pontos $P(x_1,\ y_1)$ e $Q(x_2,\ y_2)$ é dada pela fórmula: $L:\ y - y_1 = m(x - x_1)$.

Exemplo 2.39.

Determine a equação da reta no plano cartesiano, que passa pelos pontos $P(-2,\ -5)$ *e* $Q(4,\ 3)$.

Solução.

Temos que o coeficiente angular $\quad m = \dfrac{-5 - 3}{-2 - 4} = \dfrac{8}{6}$ e considere o ponto $Q(4, 3)$; então $y - 3 = \dfrac{8}{6}(x - 4)$. Logo a equação pedida é: $\quad 4x - 3y - 7 = 0$.

Observação 2.5.

Suponha temos duas retas L_1 *e* L_2 *de coeficientes angulares* m_1 *e* m_2 *então, as duas retas são paralelas se* $m_1 = m_2$*; caso o produto* $m_1 \cdot m_2 = -1$ *elas são perpendiculares.*

A distância entre dois pontos do plano $A(a,\ b)$ *e* $B(c,\ d)$ *é dada pela fórmula*

$$d(A,\ B) = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

Exemplo 2.40.

Determine a equação da reta que passa pelo ponto $P(2,\ 5)$ *e tem como coeficiente angular* $m = 3$.

Solução.

Aplicando diretamente a fórmula temos que: $y - 5 = 3(x-2)$; logo $3x - y - 1 = 0$ é a equação da reta pedida.

Exemplo 2.41.

Dada a reta $L_1 : y = 5x - 3$, *determine a equação da reta:*

a) L_2 que passa pelo ponto $A(4,\ 9)$ e seja paralela a L_1;

b) L_3 que passa pelo ponto $B(-4,\ 6)$ e seja perpendicular a L_1.

Solução.

(a) Temos que o coeficiente angular de L_1 é $m_1 = 5$ logo, tem que ser igual ao coeficiente angular da reta L_2, assim $m_2 = 5$ e $L_2 : y - 9 = 5(x-4)$ isto é $L_2 : y = 5x - 11$.

(b) Sendo $m_1 = 5$ então o coeficiente angular de L_3 é $m_3 = -\dfrac{1}{5}$ e a equação da reta L_3 é $y - 6 = \dfrac{-1}{5}(x - (-4))$ isto é $L_3 : y = -\dfrac{x}{5} + \dfrac{26}{5}$. □

Observação 2.6.

A área do triângulo determinada pelos pontos $P(x_1,\ y_1)$, $Q(x_2,\ y_2)$ *e* $R(x_3,\ y_3)$ *é dada pelo valor absoluto do determinante:* $A_{PQR} = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

Exemplo 2.42.

Determine se os pontos $P(2,\ 3)$, $Q(7,\ 9)$ *e* $R(3,\ 8)$ *pertencem a uma mesma reta.*

Solução.

Os três pontos pertencem a uma mesma reta, se; a área do triângulo formada por eles é igual a zero.

$$A_{PQR} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[(18 + 56 + 9) - (27 + 16 + 21)] = \frac{19}{2}$$

Logo, os três pontos não pertencem a uma mesma reta.

Exemplo 2.43.

Determine a equação da reta que passe pelos seguintes pontos:

a) $A(3,\ 6)$ *e* $B(7,\ 6)$ **b)** $M(5,\ 7)$ *e* $N(5,\ 9)$

Solução.

a) *O coeficiente angular é* $m = \dfrac{6-6}{3-7} = 0$, *a equação pedida é:* $y - 6 = 0(x-3) = 0$, *então* $y = 6$. *É uma reta paralela ao eixo das abscissas.*

b) *O coeficiente angular é* $m = \dfrac{9-7}{5-5} = \dfrac{2}{0}$, *a equação pedida é:* $y - 9 = \dfrac{2}{0}(x-5)$, *então* $0(y-9) = 2(x-5)$, *logo* $0 = 2(x-5)$ *isto é* $x = 5$. *É uma reta paralela ao eixo das ordenadas.*

Exemplo 2.44.

Os vértices de um triângulo são os pontos $A(2,\ 4)$, $B(3,\ -1)$ *e* $C(-5,\ 3)$. *Determine a distância do ponto* A *ao ponto de interseção das medianas.*

Solução.

Os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são respectivamente: $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$, $(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ e $(-1,\ 1)$. A equação da mediana do ponto $(-1,\ 1)$ para A é

$$y - 1 = \frac{4-1}{2+1}(x+1) \quad \Rightarrow \quad x - y + 2 = 0$$

A equação da mediana do ponto $(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ para B é

$$y - \frac{1}{2} = \frac{-1-\frac{7}{2}}{3+\frac{3}{2}}(x + \frac{3}{2}) \quad \Rightarrow \quad x + y + 1 = 0$$

A equação da mediana do ponto $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$ para C é

$$y - \frac{3}{2} = \frac{3-\frac{3}{2}}{-5-\frac{5}{2}}(x - \frac{5}{2}) \quad \Rightarrow \quad 2x + 10y - 20 = 0$$

Resolvendo estas três equações temos a interseção das três medianas é o ponto $(0,\ 2)$. A distância do ponto $(0,\ 2)$ para o ponto A é $\sqrt{(2-0)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{2}$.

Portanto a distância procurada é $2\sqrt{2}$.

2.4.6 Função maior inteiro

É a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ denotada $f(x) = [|x|]$ de modo que a cada número real do intervalo $n \leq x < n+1 \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$ associa o número inteiro n ; isto é $[|x|] = n$ é o maior inteiro que não supera o número x.

A função maior inteiro[2] também é chamada como "*função colchete*". O gráfico mostra-se na *Figura* (2.20). Aqui, $D(f) = R$ e $Im(f) = \mathbb{Z}$

Exemplo 2.45.

Observe, se $f(x) = [|x|]$ temos a seguinte tabela:

x	$x \in [-2\ -1)$	$x \in [-1,\ 0)$	$x \in [0,\ 1)$	$x \in [1,\ 2)$	$x \in [2,\ 3)$	$x \in [3,\ 4)$
$y = [\|x\|]$	-2	-1	0	1	2	3

2.4.7 Função raiz quadrada

É a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \sqrt{x}$. Seu domínio $D(f) = [0,\ +\infty)$ e sua imagem $Im(f) = [0,\ +\infty)$. Seu gráfico mostra-se na *Figura* (2.21).

Figura 2.20:

Figura 2.21:

2.4.8 Função sinal

É a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = Sgn(x) = \begin{cases} -1, & \text{se,} \quad x < 0 \\ 0, & \text{se,} \quad x = 0 \\ 1, & \text{se,} \quad x > 0 \end{cases}$

Observe, a função $f(x) = Sgn(x)$ é função constante $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Seu domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e sua imagem $Im(f) = \{\ -1,\ 0,\ 1\ \}$, o gráfico mostra-se na *Figura* (2.22).

2.4.9 Função valor absoluto de x

A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) =\mid x \mid$ é chamada "*função valor absoluto de x*".

Seu domínio é $D(f) = \mathbb{R}$ e sua imagem é $Im(f) = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$. Seu gráfico mostra-se na *Figura* (2.23).

[2]Esta função também é conhecida como função piso e denotada por $f(x) = \lfloor x \rfloor$ com o mesmo comportamento da função inteiro maior. Também existe a função teto $g(x) = \lceil x \rceil$ onde $k \leq x < k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}$

Figura 2.22:

Figura 2.23:

2.4.10 Função quadrática

É a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são constantes reais com $a \neq 0$; o domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e a imagem variam de acordo com a relação $b^2 = 4ac$, seu gráfico é uma parábola e será estudado em detalhes posteriormente. O gráfico de uma parábola apresenta um ponto mais alto ($a < 0$) ou um ponto mais baixo ($a > 0$) respeito do eixo-x, esse ponto do gráfico é chamado de vértice.

Podemos destacar, para achar o vértice da parábola podemos usar a relação $2xa+b = 0$, onde $x = -\dfrac{b}{2a}$ assim, o ponto $(-\dfrac{b}{2a}, f(-\dfrac{b}{2a}))$ é o vértice procurado; para o gráfico de $f(x)$ recomenda-se além do valor de $x = -\dfrac{b}{2a}$ considerar os pontos $x = -\dfrac{b}{2a}+1$ e $x = -\dfrac{b}{2a}-1$, para estes pontos obteremos $f(-\dfrac{b}{2a} + 1) = f(-\dfrac{b}{2a} - 1)$.

2.4.11 Função racional inteira ou polinômica

Em matemática, funções polinômicas ou polinômios são uma classe importante de funções simples e infinitamente diferenciáveis. Devido à natureza da sua estrutura, os polinômios são muito faceis de se avaliar e por consequência são usados extensivamente na análise numérica. Dizemos função polinômica à função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, onde $a_n \neq 0$ e a_n, a_{n-1}, $\cdots$ a_2, a_1 e a_0 são constantes reais, esta função também é chamada "*função polinomial de grau n*"; ($n \in \mathbb{N}$).

O gráfico da função polinômica de grau n com $n \geq 2$ denomina-se parábola de ordem n; seu domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e sua imagem $\text{Im}(f)$ depende de n e da constante a_n. Assim, o grau de uma função polinômica é expresso através do maior expoente natural entre os monômios que o formam.

Dizemos que uma função polinômica é nula quando todos os seus coeficientes a_i forem iguais a zero. Duas funções polinômicas são idênticas quando a suma ou diferença entre elas as transforma em uma função polinômica nula.

Determinar as raízes de polinômios, ou "resolver equações algébricas", é um dos problemas mais antigos da matemática. Alguns polinômios, tais como: $f(x) = x^2 + 1$ não possuem raízes dentro do conjunto dos números reais. Se, no entanto, o conjunto de candidatos possíveis for expandido ao conjunto dos números imaginários, ou seja, considerando o conjunto dos números complexos, então todo o polinômio (não-constante) possui pelo menos uma raiz (teorema fundamental da álgebra).

2.4.12 Função racional fracionária

É a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0}$$

onde $P(x)$ e $Q(x)$ são funções polinomiais de graus n e m respectivamente $a_nb_m \neq 0$, o domínio $D(f) = \{ x \in \mathbb{R} /. Q(x) \neq 0 \}$ e a imagem vária, depende de n, m e a_nb_m.

Algumas vezes, uma função é definida por uma regra $x \longmapsto f(x)$ ou simplesmente, $f(x)$ sem explicitarmos seu domínio e contradomínio.

Fica subentendido que o contradomínio é $\mathbb{R}$ e o domínio é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual $f(x)$ é um número real.

Exemplo 2.46.

Escrever somente uma expressão para a função: $f(x) = \begin{cases} 0, & se, \quad x \leq 0 \\ x, & se, \quad x > 0 \end{cases}$

Solução.

Quando $x > 0$ temos $| x |= x$, logo $f(x) = \dfrac{x + x}{2} = \dfrac{x+ | x |}{2}$. Por outro lado, se $x \leq 0$ então $| x |= -x$ assim $0 = x - x = x + (-x) = x+ | x |= \dfrac{x+ | x |}{2} = f(x)$.

Portanto, $f(x) = \dfrac{x+ | x |}{2}$.

Exemplo 2.47.

a) Mostre que para qualquer função polinômica f e qualquer número a existe uma função polinômica g e um número b tal que $f(x) = (x - a)g(x) + b$.

b) Mostre que se $f(a) = 0$, então $f(x) = (x - a)g(x)$ para alguma função g (A recíproca é evidente).

c) Mostre que se f é uma função polinômica de grau $n \in \mathbb{N}$, então f tem no máximo n raízes e existem no máximo n números a tais que $f(a) = 0$.

d) Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe uma função polinômica de grau n com raízes. Se n é par achar uma função polinômica de grau n sem raízes, e se n é ímpar achar somente com uma raiz.

Solução. **a)**

Se o grau de f é 1, podemos escrever $f(x) = cx+d = c(x-a)+(d+ac) = (x-a)g(x)+b$, onde $g(x) = c$ e $b = d + ac$.

Por indução sobre $n \in \mathbb{N}$. Suponha o resultado válido para $n = h$. Se f é de grau $h+1$ tem a forma $f(x) = a_{h+1}x^{h+1} + a_h x^h + \cdots + a_1 x + a_0$, considerando a função $p(x) = f(x) - a_{h+1}(x^{h+1} - a)$ então o grau de $p(x)$ é $n = h$ e pela hipótese indutiva podemos escrever $p(x) = f(x) - a_{h+1}(x^{h+1} - a) = (x-a)g(x) + b \quad \Rightarrow \quad f(x) = (x-a)[p(x) + a_{h+1}] + b$, e temos a forma requerida.

Solução. **b)**

Pela parte **a)** podemos supor $f(x) = (x-a)+b$, então $0 = f(a) = (a-a)g(a)+b = b$, assim $f(x) = (x-a)g(x)$.

Solução. **c)**

Suponha f tem n raízes, a_1, a_2, $\cdots$, a_n cpm $a_1 \neq a_2$, então pela parte **b)** podemos escrever $f(x) = (x-a_1)g_1(x)$ onde o grau de $g_1(x)$ é $n-1$. Porém $f(a_2) = (a_2-a_1)g_1(a_2)$ de modo que $g_1(a_2) = 0$ pelo fato $a_1 \neq a_2$. Logo podemos escrever $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)g_2(x)$ onde o grau de $g_2(x)$ é $n-2$.

Prosseguindo deste modo podemos obter $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n)\cdot c$ para algum $c \neq 0$. É óbvio que $f(a) \neq 0$ se $a \neq a_1$, a_2, $\cdot$, a_n. logo f pode ter n raízes.

Solução. **d)**

Se $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\cdot(x-n)$, então f tem n raízes. Se n é par $f(x) = x^n + 2$ não tem raízes (em $\mathbb{R}$), se n é ímpar $f(x) = x^n$ tem como única raiz $x = 0$.

2.4.13 Funções de oferta e demanda.

Existem circunstancias relativas a um fabricante, para as quais as únicas variáveis são o preço de custo e a quantidade de mercadoria demandada (vendida).

Em geral, o número de mercadorias demandadas no mercado pelos consumidores depende do preço da mesma. Quando os preços baixam, em geral, os consumidores procuram mais a mercadoria; caso o preço suba, o oposto acontece, os consumidores irão procurar menos mercadorias.

Seja p o preço de uma unidade da mercadoria, e seja q o número das mercadorias demandadas, uma equação que relaciona a quantidade q, da mercadoria demandada e o preço dado por p é chamada de *"equação da demanda"*, ela pode ser escrita em uma das seguintes formas: $p = C(q)$ ou $q = D(p)$.

Os economistas, contrariando o costume dos matemáticos, representam a variável independente p (preço) da equação $q = D(p)$ no eixo vertical e a variável dependente q (quantidade da demanda) no eixo horizontal.

Uma curva da demanda (procura) deve ter o aspecto da curva mostrada na *Figura* (2.24); numa situação normal, se o preço aumenta, a quantidade ofertada aumentará. O gráfico da equação de oferta é similar com o da *Figura* (2.25).

Curva de demanda
Figura 2.24:

Curva de oferta
Figura 2.25:

Definição 2.12.

- A relação $q = D(p)$ é chamada *"função da demanda"*, e $D(p)$ é o número de unidades de mercadoria que será demandadas se p for o preço por unidade.
- A relação $p = C(q)$ é chamada *"função do custo total"*, e $C(q)$ é o preço de uma unidade da mercadoria quando q unidades são demandadas.
- A relação $R = R(q)$ representa a função receita total, gerada pela venda de q unidades do produto.
- A função lucro total é definido como sendo a diferença entre a receita total e o custo total; $L(q) = R(q) - C(q)$ isto representa o lucro ao vender q unidades do produto.

No que segue utilizaremos a seguinte notação de funções:

a)	$C = C(q)$	Custo total.	**b**)	$CM = CM(q)$	Custo Médio.
c)	$R = R(q)$	Receita total.	**d**)	$RM = RM(q)$	Receita Média.
e)	$D = D(q)$	Demanda.	**f**)	$S = S(p)$	Oferta.

Exemplo 2.48.

Consideremos a seguinte equação da demanda: $p^2 + 2q - 16 = 0$. *Em situações econômicas, as variáveis* q *e* p *não são negativas, temos* $p = \sqrt{16 - 2q}$ *quando* $16 - 2q \geq 0$. *Portanto a função custo total do preço para a equação da demanda é* $p = C(q) = \sqrt{16 - 2q}$.

Da equação da demanda temos $q = D(p) = 8 - \dfrac{1}{2}p^2$ *que expressa* q *como função de* p.

Definição 2.13.

- O custo médio da produção $CM = CM(q)$ de cada unidade é obtido mediante a relação $CM(q) = \dfrac{C(q)}{q}$ chamada *"função custo médio"*.
- Ao dividir a receita total $R(q)$ pela quantidade q de unidades produzidas obtém-se $RM(q) = \dfrac{R(q)}{q}$ chamada "*função receita média*".

Exemplo 2.49.

Dadas as funções de custo total, determine a função de custo médio:

a) $C(q) = 2q^3 - 12q^2 + 50q + 40$ **b)** $C(q) = 300 + \dfrac{60}{q} + \dfrac{q^2}{6}$

Solução.

a) $CM = \dfrac{2q^3 - 12q^2 + 50q + 40}{q} = 2q^2 - 12q + 50 + \dfrac{40}{q}$

b) $CM(q) = \dfrac{\frac{300}{q} + 60 + \frac{q}{6}}{q} = \dfrac{300}{q} + 60 + \dfrac{q}{6}$.

Exemplo 2.50.

Uma imobiliária estima que o lucro mensal L *em reais que obtém ao alugar um prédio de* q *andares, é dado pela equação* $L(q) = -2q^2 + 92q$, *qual é número de andares que torna mais rentable o aluguel do prédio?*

Solução.

Temos, $L(q) = -2q^2 + 92q = 2(46q - q^2) \quad \Rightarrow \quad L(q) = 2[23^2 - 23^2 + 46q - q^2] = 2[23^2 - (23 - q)^2]$ quando $q = 23$, $L(23) = 1058$ é o máximo absoluto.

Portanto, é mais rentável o aluguel de um prédio de 23 andares.

Em geral, ao conjunto de empresas que produzem uma mesma mercadoria chamamos de indústria; por exemplo, ao conjunto de todas as empresas de confecção de calçados do Brasil, chamamos indústria de calçados do Brasil.

O mercado para uma determinada mercadoria consta da indústria e dos consumidores (em geral); a equação de oferta do mercado é determinada pelas equações de oferta das empresas integrantes do mercado; e a equação de demanda do mercado é determinada pelas equações de demanda de todos os consumidores.

Exemplo 2.51.

Uma companhia aérea tem como tarifa fixa R$800 e transporta 8.000 passageiros cada dia. Ao considerar um aumento na tarifa, a companhia determina que perderá 400 passageiros por cada R$50 de aumento. Sob estas condições; qual; dever ser o aumento para que o ingresso seja máximo?

Solução.

Seja x o número de aumentos de R$50 na tarifa, então a tarifa resultante é R$$(800 + 50x)$ e o número de passageiros será de $8.000 - 400x$.

A função que determina o ingresso total é: $I(x) = (800 + 50x)(8000 - 400x) = 20.000(320 + 4x - x^2)$ com $0 \leq x \leq 20 \quad \Rightarrow \quad I(x) = 20.000(320 + 4x - x^2) = 20.000[324 - (4 - 4x + x^2)] = 20.000[324 - (x - 2)^2]$. Observe que, quando $x = 2$ teremos máximo valor para $I(x)$.

Logo, o aumento tem que ser de R$100 e o custo de cada passagem será de R$900.

Observação 2.7.

O equilíbrio de mercado ocorre quando a quantidade da mercadoria demandada, a um determinado preço, é igual à quantidade de mercadoria oferecida àquele preço.

Quando ocorre o equilíbrio de mercado, a quantidade de mercadoria produzida é chamada "quantidade de equilíbrio"; e, o preço da mercadoria é chamado preço de equilíbrio.

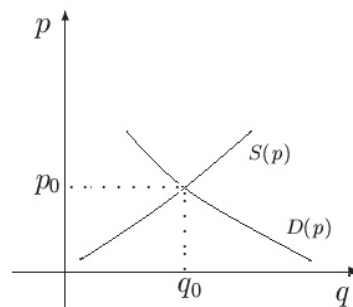
Definição 2.14.

Definimos o "ponto de equilíbrio" como aquele ponto de interseção do gráfico da curva da oferta com o da demanda. Suas coordenadas são o preço de equilíbrio e a quantidade de equilíbrio.

Na *Figura* (2.26) mostra-se o ponto de equilíbrio; se o preço está acima do preço de equilíbrio, há excesso de oferta e o preço tende a cair; se o preço está abaixo do ponto de equilíbrio, há escassez de oferta e o preço tende a subir.

Em economia, particularmente nos estudos referentes à contabilidade de custos, o ponto de equilíbrio econômico é o momento quando as receitas se igualam aos custos e despesas. É, portanto, o momento em que um produto deixa de custar e passa a dar lucro.

Figura 2.26:

A ele adicionam-se os custos fixos e todos os custos de oportunidade, como por exemplo os referentes ao uso do capital próprio, ao possível aluguel das edificações (caso a empresa seja proprietária), perda de salários, etc.

Exercícios 2-3

1. Qual o número que excede a seu quadrado o máximo possível?

2. A diferença entre dois números é 8. **1**.) Determine o menor deles para que o produto seja o menor possível; **2**.) Qual é o menor valor desse produto ?

3. Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, sendo $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, dadas por $f(x) = 2x - 3$ e $f(g(x)) = -4x + 1$. Nestas condições, determine $g(-1)$.

4. Determine o coeficiente angular da equação da reta que passa pelos pontos indicados:

1. $A(1,\ -3)$ e $B(0,\ 1)$	**2**. $M(0,\ 1)$ e $N(3,\ 2)$	**3**. $P(-1,\ 3)$ e $Q(5,\ -2)$
4. $C(0,\ 1)$ e $D(0,\ 5)$	**5**. $B(-1,\ 2)$ e $C(3,\ -5)$	**6**. $S(3,\ 9)$ e $T(3,\ 7)$
7. $M(-1,\ 6)$ e $P(5,\ 6)$	**8**. $G(3,\ 6)$ e $H(1,\ 4)$	**9**. $P(5,\ 3)$ e $S(5,\ 2)$

5. Determine a equação da reta que passa pelos pontos indicados; desenhar o gráfico:

1. $A(1,\ -3)$ e $B(0,\ 1)$	**2**. $M(0,\ 1)$ e $N(3,\ 2)$	**3**. $P(-1,\ 3)$ e $Q(5,\ -2)$
4. $D(3,\ -1)$ e $E(1,\ 1)$	**5**. $A(3,\ -2)$ e $B(3,\ 2)$	**6**. $R(-1,\ 3)$ e $U(3,\ -2)$
7. $F(2,\ 8)$ e $G(0,\ 0)$	**8**. $Q(7,\ 1)$ e $S(8,\ 12)$	**9**. $S(6,\ 8)$ e $R(5,\ 12)$

6. Mostrar que os pontos $P_1(3,\ 3)$, $P_2(-3,\ -3)$, $P_3(-3\sqrt{3},\ 3\sqrt{3})$ são os vértices de um triângulo equilátero.

7. Se $P_1(-4,\ 2)$ e $P_2(4,\ 6)$ são os pontos extremos do segmentos retilíneo orientado $\overrightarrow{P_1P_2}$, achar as coordenadas do ponto $P(x,\ y)$ que divide este segmento na razão $\overline{P_1P}\ :\ \overline{PP_2} = -3$.

8. Determinar o ângulo agudo do paralelogramo cujos vértices são pontos $A(-2,\ 1)$, $B(1,\ 5)$, $C(10,\ 7)$ e $D(7,\ 3)$.

9. Demonstrar analiticamente que os segmentos que unem os pontos médios dos lados sucessivos de qualquer quadrilátero formam um paralelogramo.

10. Provar analiticamente que, se as diagonais de um paralelogramo são mutuamente perpendiculares o paralelogramo é um losango.

11. Determinar a equação da linha reta que contém o ponto $(-3,\ 1)$ e é paralela à reta que passa pelos dois pontos $(0,\ -2)$ e $(5,\ 2)$.

12. Determinar a equação da mediatriz do segmento retilíneo cujos extremos são os pontos $(-2,\ 1)$ e $(3,\ -5)$.

13. Mostre que duas retas, $L_1\ :\ Ax + By + C = 0$ e $L_2\ :\ A'x + B'y + C' = 0$ são perpendiculares, se $A.A' + B.B' = 0$.

14. A equação de uma reta L é $5x - 7y + 11 = 0$. **a)** Escrever a equação que representa todas as retas paralelas a L. **b)** Determinar a equação da reta paralela a L que passe por $P(4,\ 2)$.

15. O preço unitário de certo produto é 5, e o custo fixo de produção é 40; colocado no mercado, verificou-se que a demanda para esse produto era dada pela relação $p = 15 - \dfrac{q}{5}$. **(a)** Determine as funções C (Custo) e R (Receita) para esse produto e faça seus gráficos num mesmo sistema de eixos. **(b)** Determine a função *Lucro* e faça o seu gráfico. Observe que o lucro L é zero quando $C = R$. **(c)** Para que valores de q temos $L \geq 0$? **(d)** Determine funções de *Receita Média* e *Custo Médio* a faça seus gráficos.

16. Traçar a curva cuja equação é: $\quad x^2 + xy^2 - y^2 = 0$.

17. Uma fábrica de equipamentos eletrônicos esta colocando um novo produto no mercado. Durante o primeiro ano o custo fixo para iniciar a nova produção é de R\$140.000 e o custo variável para produzir cada unidade é R\$25. Durante o primeiro ano o preço de venda é R\$65 por unidade. **(a)** Se X unidades são vendidas durante o primeiro ano, expresse o lucro do primeiro ano como uma função de X. **(b)** Estima-se que 23.000 serão vendidas durante o primeiro ano. Use o resultado da parte (a) para determinar o lucro do primeiro ano, se os dados de venda forem atingidos. **(c)** Quantas unidades precisam ser vendidas durante o primeiro ano para que a fábrica não ganhe nem perda ?

18. Dadas $q = 4p - 5$ e $q = \dfrac{150}{p + 15} + 29$ respectivamente funções de oferta e demanda para um certo produto, faça seus gráficos num mesmo eixos de coordenadas e determine o ponto de equilíbrio

19. O custo total para produzir q unidades de um determinado produto é $C(q) = q^2 + 20q + 5$ reais, e o preço de venda de uma unidade é de $(30 - q)$ reais. **a)** Achar a função de lucro total. **b)** Achar a função de receita total; **c)** Qual é o custo médio para $q = 10$?. **d)** Determine a função de demanda.

20. O custo mensal fixo de uma fábrica que produz esquis, é R\$4.200 e o custo variável R\$55 por par de esquis. O preço de venda é R\$105 por par de esquis. **(a)** Se x pares de esquis são vendidos durante um mês, expresse o lucro mensal como função de x. **(b)** Use o resultado da parte (a) para determinar o lucro de dezembro se 600 pares de esquis foram vendidos nesse mês. **(c)** Quantos pares de esquis devem ser vendidos para que a fábrica encerre um mês sem lucro nem prejuízo?

21. Um fabricante de dois tipos de ração para aves, produz x toneladas por dia da ração A e y toneladas da ração B onde $y = \dfrac{x-3}{x-1}$. Determine a função receita total, sabendo que os preços fixos por tonelada são respectivamente p_1 e p_2 onde $p_2 = \dfrac{3}{4}p_1$.

22. As equações de demanda e oferta do mercado são respectivamente $q^2 + p^2 - 36 = 0$ e $qp + 2 = 5p$ onde p é o preço em reais R\$. Trace um esboço das curvas de oferta e demanda num mesmo sistema de coordenadas. Determine a quantidade e o preço de equilíbrio.

23. O período de um pêndulo (o tempo, para uma oscilação completa) é diretamente proporcional à raiz quadrada (do comprimento do pêndulo. e se o comprimento for $240\,cm$ o período será de $3\,s$. **(a)** Expresse o número de segundos do período de um pêndulo como função do número de centímetros de seu comprimento. **(b)** Ache o período de um pêndulo de $60\,cm$ de comprimento.

24. A função de custo total de uma empresa $A\&A$ é $C(x) = 0,2x^2 - 6x + 100$ onde x é dado em Kg. Determine a função de custo médio e o valor de x para que o custo total seja mínimo.

25. Calcular o ponto de equilíbrio de um monopolista se a função de custo é $C(q) = 0,5q^2 + 20q + 45$ e o preço de venda de cada unidade é $p = 60 - q$.

26. Admitamos que, ao se fabricarem q unidades de um certo produto, o custo total de fabricação é de $C(q) = q^3 - 6q^2 + 15q$ reais. Em que nível de produção o "custo médio" por unidade será o menor?

27. São dadas as equações de oferta e demanda de um certo produto: $2q = p - 12$ e $q^2 - p + 4 = 0$. Determine a quantidade e o preço de equilíbrio.

28. Determine o ponto de interseção e desenhar o gráfico das curvas:

    1. $R(q) = 100q, \qquad C(q) = 50 + 3q$

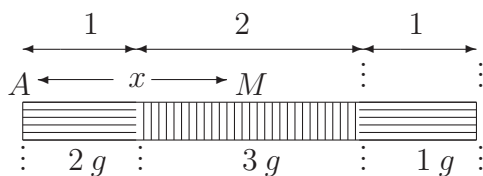
    2. $R(q) = 10q - 0,5q^2, \qquad C(q) = 10 + q$

    3. $R(q) = 80q, \qquad C(q) = 0,1q^2 + 5q + 200$

29. Temos as equações de oferta e demanda, determinar o ponto de equilíbrio e desenhar o gráfico num mesmo sistema de coordenadas. **a)** $q = p + 1$ e $q = 10 - p$; **b)** $q = 50 + 2p$ e $q(p + 10) = 500$.

30. Um comerciante estima que o custo de produção de q unidades de uma mercadoria é $C(q) = 20q + 20.000$, a equação da demanda é $p + q = 5.000$, onde q são as unidades demandadas a cada semana ao preço unitário de p reais. Determine o lucro ao vender as q unidades.

31. Suponha que o custo total seja dado por $C(q) = 10 + q$ e a receita total $R(q) = 10q - 0,5q^2$. Determine o valor de q para o qual se obtém utilidade máxima.

32. A seguinte "*barra*" está formada por três segmentos de comprimentos iguales a 1; 2; 1 centímetros, e o peso é igual a 2; 3; 1 unidades de peso respectivamente.

O peso do segmento de comprimento $\overline{AM}$ é igual a $f(x)$, que é função de x. Para que valores de x está definida esta função?. Apresentar sua forma analítica desta função e construir sue gráfico.

33. Dada a relação de f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, mostre que $f(x^2 + y^2) = f[f(x)] + f[f(y)] + 2f(x)f(y)$.

2.5 Operações com funções

Definição 2.15.
Dizemos que duas funções $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *são iguais quando* $\text{D}(f) = \text{D}(g)$ *e* $f(x) = g(x) \quad \forall\, x \in \text{D}(f)$.

Definição 2.16.
Sejam f *e* g *duas funções reais com* $\text{D}(f) = A$ *e* $\text{D}(g) = B$ *se* $A \cap B \neq \emptyset$ *definimos:*

a) *Função soma de* f e g : $(f+g)(x) \doteq f(x) + g(x)$ e $\text{D}(f+g) = A \cap B$.

b) *Função diferença de* f e g : $(f-g)(x) \doteq f(x) - g(x)$ e $\text{D}(f-g) = A \cap B$

c) *Função produto de* f e g : $(f \cdot g)(x) \doteq f(x)g(x)$ e $\text{D}(f \cdot g) = A \cap B$

d) *Função quociente de* f e g : $\left[\dfrac{f}{g}\right](x) \doteq \dfrac{f(x)}{g(x)}$ sempre que o domínio cumpra: $\text{D}(\dfrac{f}{g}) = \{\, x \in A \cap B\, /. \quad g(x) \neq 0\,\}$

e) *Produto de uma constante por uma função*: $(kf)(x) \doteq kf(x)$ onde k é constante . Nesta caso $\text{D}(kf) = \text{D}(f)$

f) *Função valor absoluto*: $\mid f \mid (x) \doteq \mid f(x) \mid$ e $\text{D}(\mid f \mid) = \text{D}(f)$

Exemplo 2.52.

Dada as funções $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ *e* $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ *com seus respectivos domínios* $\text{D}(f) = [-5,\ 5]$ *e* $\text{D}(g) = (-\infty,\ -3] \cup [3, +\infty)$, *temos:*

a) $(f+g)(x) = \sqrt{25 - x^2} + \sqrt{x^2 - 9}$ e $\text{D}(f+g) = [-5,\ -3] \cup [3,\ 5]$.

b) $(f-g)(x) = \sqrt{25 - x^2} - \sqrt{x^2 - 9}$ e $\text{D}(f-g) = [-5,\ -3] \cup [3,\ 5]$.

c) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{25 - x^2} \cdot \sqrt{x\ 2 - 9}$ e $\text{D}(f \cdot g) = [-5,\ -3] \cup [3,\ 5]$.

d) $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\sqrt{25 - x^2}}{\sqrt{x^2 - 9}}$, $\text{D}(\dfrac{f}{g}) = [-5,\ -3) \cup (3,\ 5]$

e) $(kf)(x) = k\sqrt{25 - x^2}$ e $\text{D}(kf) = [-5,\ 5]$

f) $\mid f \mid (x) = \mid \sqrt{25 - x^2} \mid = \sqrt{25 - x^2}$ e $\text{D}(\mid f \mid) = [-5,\ 5]$

2.5.1 Composição de funções

Definição 2.17.
Sejam $f\ :A\longrightarrow\mathbb{R}$ *e* $g\ :B\longrightarrow\mathbb{R}$ *duas funções tais que* $\text{Im}(f)\subseteq B$*; a função* $(g\circ f)$ *definida por* $(g\circ f)(x)\doteq g(f(x))$ *denomina-se* "função composta de g e f" *(nessa ordem).*

O domínio da função $g\circ f$ é:

$$\text{D}(g\circ f)=\{\,x\in\text{D}(f)\ /.\ f(x)\in\text{D}(g)\,\}$$

O esquema da *Figura* (2.27) mostra o que acontece na composição de funções.

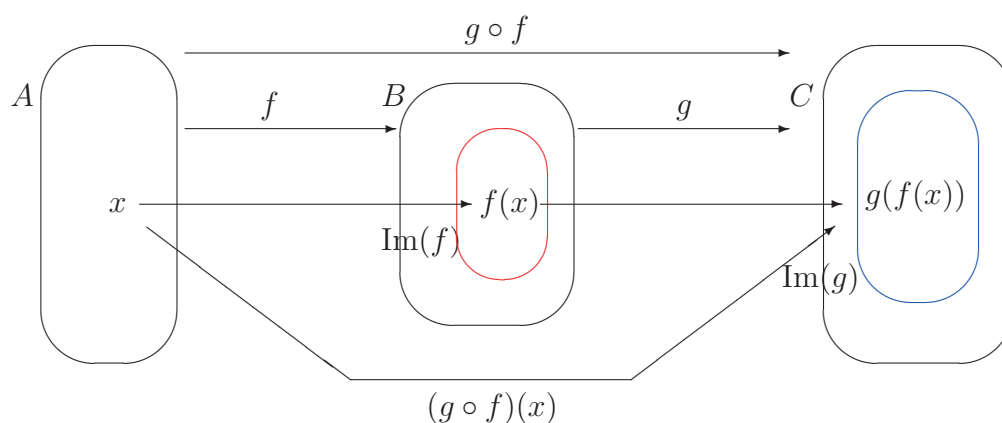



Figura 2.27:

Exemplo 2.53.

Seja $A=\{\,1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\,\}$ *e sejam* $f,\ g\ :A\longrightarrow A$ *definidas por:* $f(1)=3,\ f(2)=5,\ f(3)=3,\ f(4)=1,\ f(5)=2,\ g(1)=4,\ g(2)=1,\ g(3)=1,\ g(4)=2,\ g(5)=3$.

Determine $g\circ f$ *e* $f\circ g$*.*

Solução.

$$\begin{array}{ll}
(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(3)=1 & (f\circ g)(1)=f(g(1))=f(4)=1\\
(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(5)=3 & (f\circ g)(2)=f(g(2))=f(1)=3\\
(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(3)=1 & (f\circ g)(3)=f(g(3))=f(1)=3\\
(g\circ f)(4)=g(f(4))=g(1)=4 & (f\circ g)(4)=f(g(4))=f(2)=5\\
(g\circ f)(5)=g(f(5))=g(2)=1 & (f\circ g)(5)=f(g(5))=f(3)=3
\end{array}$$

Observe, as funções $g\circ f$ e $f\circ g$ não têm a mesma definição.

Exemplo 2.54.

a) *Dadas as funções* $f(x)=x^2-1$ *e* $g(x)=2x$*, calcular* $f[g(x)]$ *e* $g[f(x)]$*.*

b) *Dadas as funções* $f(x) = 5x$ *e* $f[g(x)] = 3x + 2$*, calcular* $g(x)$*.*

c) *Dadas as funções* $f(x) = x^2 + 1$ *e* $g(x) = 3x - 4$*, determine* $f[g(3)]$*.*

Solução.

(a) $f[g(x)] = f(2x) = (2x)^2 - 1 = 4x^2 - 1$ $\quad g[f(x)] = g(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) = 2x^2 - 2$.

(b) Como $f(x) = 5x$, então $f[g(x)] = 5 \cdot g(x)$.

Porém, $f[g(x)] = 3x + 2$; logo $5 \cdot g(x) = 3x + 2$, e daí $g(x) = \dfrac{(3x+2)}{5}$.

(c) $g(3) = 3(3) - 4 = 5$ então $f[g(3)] = f(5) = 5^2 + 1 = 25 + 1 = 26$.

Exemplo 2.55.

Sejam f *e* g *duas funções definidas por* $f(x) = 3x - 2$ *e* $g(x) = x^2 + 4x$*. Determine as funções* $g \circ f$ *e* $f \circ g$*.*

Solução.

Temos os seguintes domínios e imagens para cada uma das funções : $\text{D}(f) = \mathbb{R}, \text{Im}(f) = \mathbb{R}$, $\text{D}(g) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(g) = [-4, +\infty)$.

i) Do fato $\text{Im}(f) \subseteq \text{D}(g)$ então $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 + 4f(x) \quad \Rightarrow \quad g(f(x)) = [3x - 2]^2 + 4[3x - 2] = 9x^2 - 4$.

Portanto, $(g \circ f)(x) = 9x^2 - 4$ e $\text{D}(g \circ f) = \mathbb{R}$.

ii) Do fato $\text{Im}(g) \subseteq \text{D}(f)$ então $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 2 \quad \Rightarrow \quad f(g(x)) = 3(x^2 + 4x) - 2 = 3x^2 + 12x - 2$.

Portanto, $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 12x - 2$ e $\text{D}(f \circ g) = \mathbb{R}$.

Muitas vezes são dadas funções $f(x)$ e $g(x)$ sem especificar quais são seus domínios; para obter gof o domínio de f deve ser escolhido de modo que $\text{Im}(f) \subseteq \text{D}(g)$.

Exemplo 2.56.

Sejam as funções $h(x) = 10$ *definida em* $[-3, 4]$ *e* $s(x) = x^2 - 8$ *definida em* $[0, 7]$*. Determine* $(h \circ s)(x)$ *e* $(s \circ h)(x)$*.*

Solução.

i) Solução de $(h \circ s)(x)$

Temos $\text{D}(h) = [-3, 4]$ e $\text{D}(s) = [0, 7]$.

Por outro lado, $(h \circ s)(x) = h(s(x)) = 10 \quad \forall\, x \in [0, 7]$ e $s(x) \in [-3, 4]$; isto é, $\forall\, x \in [0, 7]$ e $-3 \leq x^2 - 8 \leq 4$ então $x \in [0, 7]$ e $5 \leq x^2 \leq 12$.

Portanto, $(hos)(x) = 10 \quad \forall\, x \in [\sqrt{5}, \sqrt{12}]$

ii) Solução de $(s \circ h)(x)$.

Observe que, $(s\circ h)(x) = s(h(x)) = [h(x)]^2 - 8 = 10^2 - 8 = 92$, para todo $x \in [-3, 4]$ e $h(x) \in [0,\ 7]$; isto é $\forall\, x \in [-3,\ 4]$ e $0 \leq 10 \leq 7$ (isto último é absurdo).

Portanto, não existe $(soh)(x)$.

Exemplo 2.57.

Consideremos as funções $h(x) = \sqrt{x - 15}$ *e* $g(x) = x^2 + 5$*; determine* $(h \circ g)(x)$ *e* $(g \circ h)(x)$.

Solução.

i) Temos $D(h) = [15,\ +\infty)$ e $D(g) = \mathbb{R}$. Por outro lado, $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = \sqrt{g(x) - 15} = \sqrt{(x^2 + 5) - 15} = \sqrt{x^2 - 10}$.

$D(h\circ g) = \{\, x \in \mathbb{R} /.\, g(x) \in [15,\ +\infty)\}$, isto é $x \in \mathbb{R}$ e $15 \leq x^2 + 5$, então $x \leq -\sqrt{10}$ ou $x \geq \sqrt{10}$.

Portanto, $(h \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 10} \quad \forall\, x \in (-\infty,\ -\sqrt{10}] \cup [\sqrt{10},\ +\infty)$.

ii) Temos $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = [h(x)]^2 + 5 = [\sqrt{x - 15}]2 + 5 = x - 10$, isto $\forall\, x \in [15,\ +\infty)$ e $h(x) \in D(g) = \mathbb{R}$, então $\forall\, x \in [15,\ +\infty)$ e $x \in \mathbb{R}$.

Portanto, $(g \circ h)(x) = x - 10 \quad \forall\, x \in [15,\ +\infty)$.

Exemplo 2.58.

Considere as seguintes funções:

$$f(x) = \begin{cases} x + 12, & se, \quad x < 1 \\ 5 - x, & se, \quad 1 \leq x \end{cases} \qquad e \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & se, \quad 4 \leq x \leq 16 \\ 4x + 12, & se, \quad -1 \leq x \leq 3 \end{cases} ;$$

determine $f \circ g$ *e indique seu domínio.*

Solução.

Da definição de função composta temos:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} g(x) + 12, & \text{se,} \quad g(x) < 1 \\ 5 - g(x), & \text{se,} \quad 1 \leq g(x) \end{cases} \qquad \text{isto é}$$

$$f(g(x)) = \begin{cases} x^2 + 12, & \text{se,} \quad x^2 < 1 \quad \text{e} \quad 4 \leq x \leq 16 \\ (4x + 12) + 12, & \text{se,} \quad 4x + 12 < 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq x \leq 3 \\ 5 - x^2, & \text{se,} \quad 1 \leq x^2 \quad \text{e} \quad 4 \leq x \leq 16 \\ 5 - (4x + 12), & \text{se,} \quad 1 \leq 4x + 12 \quad \text{e} \quad -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

i) Se $\quad x^2 < 1 \quad$ e $\quad 4 \leq x \leq 16 \qquad \Rightarrow \qquad (-1 < x < 1$ e $4 \leq x \leq 16)$, logo $x \notin \mathbb{R}$.

ii) Quando $\quad 4x+12<1 \quad$ e $\quad -1 \leq x \leq 3 \quad \Rightarrow \quad (x < -\dfrac{11}{4} \quad$ e $\quad -1 \leq x \leq 3)$, logo $x \notin \mathbb{R}$.

iii) Para $\quad 1 \leq x^2 \quad$ e $\quad 4 \leq x \leq 16 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad [(x \leq -1 \quad \text{ou} \quad 1 \leq x) \quad \text{e} \quad 4 \leq x \leq 16] \quad \Rightarrow \quad 4 \leq x \leq 16$$

logo $f(g(x)) = 5 - x^2$ se $4 \leq x \leq 16$.

iv) Quando $(\quad 1 \leq 4x+12 \quad$ e $\quad -1 \leq x \leq 3) \quad \Rightarrow$

$$(-\frac{11}{4} \leq x \quad \text{e} \quad -1 \leq x \leq 3) \quad \Rightarrow \quad -1 \leq x \leq 3$$

logo $f(g(x)) = 5 - (4x+12) = -4x - 7$ se $-1 \leq x \leq 3$.

Portanto, $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 5 - x^2, & \text{se}, \quad 4 \leq x \leq 16 \\ -4x - 7, & \text{se}, \quad -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

Exemplo 2.59.

Seja $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, *determine a função* $(f \circ f \circ f)(x)$.

Solução.

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{1}{1 - f(x)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

Por outro lado, $\quad (f \circ f \circ f)(x) = (f(f \circ f))(x) = f(f(f(x))) = 1 - \dfrac{1}{f(x)}$,

isto é $(f \circ f \circ f)(x) = 1 - \dfrac{1}{\frac{1}{1-x}} = 1 - (1-x) = x$.

Portanto $(fofof)(x) = x$.

2.5.2 Função inversa

Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função bijetiva, do fato $\text{Im}(f) = B$ isto significa que para todo $y \in B$ existe um único elemento $x \in A$, tal que $f(x) = y$. Então podemos definir a função $g : B \longrightarrow A$ tal que a cada $y \in B$ corresponda um único $x \in A$ tal que $g(y) = x$, isto é:

$$g(y) = x \quad \text{se, e somente se} \quad f(x) = y$$

Definição 2.18. *Função inversa.*
Se $f : A \longrightarrow B$ *é uma função bijetiva, quando existe, a função* $g : B \longrightarrow A$ *tal que* $f \circ g = id_B$ *e* $g \circ f = id_A$*, denomina-se função inversa da função* f *e, é denotada por* f^{-1}*. Isto é* $f \circ f^{-1} = id_B$ *e* $f^{-1} \circ f = id_A$ *onde* $(x,\ y) \in f$ *e* $(y,\ x) \in f^{-1}$*.*

A *Figura* (2.28) ilustra a relação que existe entre a função f e a função inversa f^{-1}.

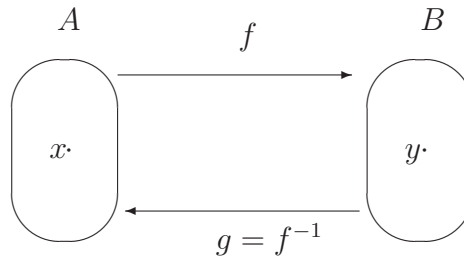



Figura 2.28: Função inversa

Do diagrama da *Figura* (2.28) temos:

i) A função $f^{-1} \circ f = id_A$ onde (id_A é função identidade em A) isto é $f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall\, x \in A$.

ii) A função $f \circ f^{-1} = id_B$ onde (id_B é função identidade em B) isto é $f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall\, x \in B$.

Exemplo 2.60.

Dada a função $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2} \quad (x \neq 2)$ *calcule* $f^{-1}(x)$*.*

Solução.

Seja $y = f(x)$, então $y = \dfrac{x-1}{x+2}$, devemos isolar x nessa igualdade.

Então $y = \dfrac{x-1}{x+2} \quad \Rightarrow \quad y(x+2) = x-1 \quad \Rightarrow \quad yx + 2y = x - 1 \quad \Rightarrow \quad y.x - x = -(1+2y) \quad \Rightarrow \quad x = -\dfrac{1+2y}{1-y} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{1+2y}{y-1}$.

Logo, $f^{-1}(y) = \dfrac{1+2y}{y-1}$, em geral a função não depende do parâmetro é indiferente escrever $y,\ t,\ z,$ etc, como variável; assim podemos escrever $f^{-1}(x) = \dfrac{1+2x}{x-1}$.

Exemplo 2.61.

Mostrar que, se $f(x) = \sqrt[n]{a - x^n}, \quad x > 0$*; temos que* $f(f(x)) = x$*. Determine a função inversa de* $y = f(x)$*.*

Solução.

Temos da hipótese $x > 0$,

$$f(f(x)) = \sqrt[n]{a - [f(x)]^n} = \sqrt[n]{a - [\sqrt[n]{a - x^n}]^n} = \sqrt[n]{a - [a - x^n]} = x$$

Por outro lado, seja $y = f(x)$, então $y = \sqrt[n]{a - x^n}$ assim $x = \sqrt[n]{a - y^n}$ isto é $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{a - y^n}$, sendo a função definida independente da variável resulta $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{a - x^n}$

2.5.3 Relação entre o gráfico de f e de f^{-1}

Da definição de função inversa temos que, se o ponto $P(a,\ b)$ pertence ao gráfico da função f, então $Q(b,\ a)$ pertence ao gráfico da função f^{-1} e vice-versa. Observe na *Figura* (2.29) a identificação no plano dos pontos $P(a,\ b)$ e $Q(b,\ a)$ note-se que são simétricos respeito da reta bissetriz $y = x$.

Isto resulta do fato ser o quadrilátero $PAQB$ um quadrado, de lados $\overline{AP} = \overline{QB} = b - a = \overline{AQ} = \overline{PB}$.

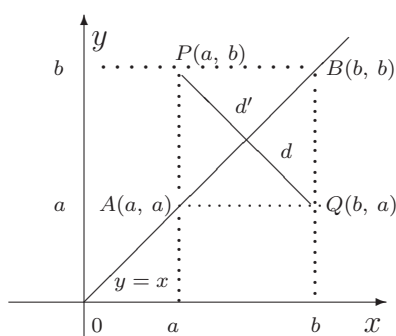



Figura 2.29:

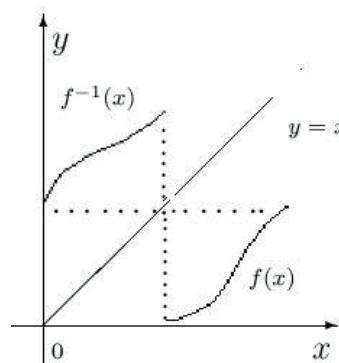



Figura 2.30:

Logo P e Q são os vértices opostos do quadrado, e considerando que no quadrado as diagonais são perpendiculares e cortam-se no ponto médio, resulta $d = d'$, onde:

$d =$ distância de P à bissetriz $y = x$.

$d' =$ distância de Q à bissetriz $y = x$

Se consideramos uma função $f : A \longrightarrow B$ e sua função inversa $f^{-1} : B \longrightarrow A$ então seus gráficos são simétricos respeito da bissetriz $y = x$, pois $(x,\ y) \in G_f$ se e somente se $(b,\ a) \in G_{f^{-1}}$.

A *Figura* (2.30) representa os gráficos da função f e sua inversa f^{-1}.

Exemplo 2.62.

A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = 3x+5$ *é injetiva, logo admite função inversa* $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. *Determinemos esta função inversa* f^{-1}.

Solução.

Primeiro método:

Sabemos que $f(f^{-1}(y)) = y$, logo

$$f(f^{-1}(y)) = 3f^{-1}(y) + 5 = y$$

de onde $f^{-1}(y) = \dfrac{y-5}{3}$ $\forall\, y \in \mathbb{R}$, sendo a variável y na função f^{-1} independente, podemos utilizar a letra x e obter $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{3}$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Segundo método:

Suponha $y = f(x)$, então $y = 3x + 5$ onde, isolando a variável x resulta: $x = \dfrac{y-5}{3}$, logo $f^{-1}(y) = \dfrac{y-5}{3}$ $\forall\, y \in \mathbb{R}$ ou $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{3}$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.63.

Determine a função inversa $f^{-1}(x)$, se $f(x+1) = x^2 - 3x + 2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^+$.

Solução.

Seja $t = x + 1$, então $x = t - 1$, logo

$$f(t) = f(x+1) = x^2 - 3x + 2 = (t-1)^2 - 3(t-1) + 2 = t^2 - 5t + 6$$

observe, a função $f(t)$ existe para $t \geq 1$.

Consideremos $y = f(t) = t^2 - 5t + 6$ então $t^2 - 5t + 6 - y = 0$, pela fórmula de Bhaskara temos $t = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4(6-y)}}{2}$, assim

$$25 - 4(6-y) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + 4y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad y \geq -\frac{1}{4}$$

pela condição de t, temos que $f^{-1}(y) = \dfrac{5 + \sqrt{25 - 4(6-y)}}{2}$ sempre que $y \geq -\dfrac{1}{4}$.

Portanto, $f^{-1}(x) = \dfrac{5 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$ sempre que $x \geq -\dfrac{1}{4}$; $\quad \text{Im}(f^{-1}) = [\dfrac{5}{2},\ +\infty)$.

Exemplo 2.64.

a) Suponha $f(x) = x + 1$. Existem funções g tais que $f \circ g = g \circ f$?

b) Suponha f seja uma função constante. Para quais funções g cumpre que $f \circ g = g \circ f$?

c) Suponha que $f \circ g = g \circ f$ para todas as funções g. Mostre que f é a função identidade.

Solução.

a) A condição $f \circ g = g \circ f$ significa que $g(x) + 1 = g(x+1)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Existem muitas funções g que cumprem esta condição.

b) Suponha $f(x) = c, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, então $f \circ g = g \circ f$ se e somente se $c = f(g(x)) = g(f(x)) = g(c)$ isto é $g(c) = c$.

c) Se $f \circ g = g \circ f$ para todo g, então cumpre isto para todas as funções, em particular para a função constante $g(x) = c$; logo da parte **b)** segue que $f(c) = c$ para todo c.

Exemplo 2.65.

Mostre que a função inversa da função homográfica $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ *(considerando* $ad - bc \neq 0$*) também é homográfica.*

Solução.

Seja $y = f(x)$, então $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ existe sempre que $x \neq \dfrac{-d}{c}$.

A igualdade $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \quad \Rightarrow \quad y(cx+d) = ax+b \quad \Rightarrow \quad x(yc-a) = b - dy \quad \Rightarrow$ $x = \dfrac{dy-b}{a-cy}, \quad \forall\, y \neq \dfrac{a}{c}$.

Denotando com $f^{-1}(x) = \dfrac{dx-b}{a-cx}$ temos a função inversa de $f(x)$.

Observe, $f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = \dfrac{x(ad-bc)}{ad-bc} = x$ da hipótese $ad \neq bc$. De modo análogo mostra-se que $f^{-1} \circ f(x) = x$.

Portanto $f^{-1}(x) = \dfrac{dx-b}{a-cx}$ é homográfica.

Exemplo 2.66.

Estima-se que um operário de um estabelecimento que faz molduras para quadros possa pintar y molduras depois x horas do início do seu trabalho que começa às $08:00$ *horas da manhã, onde* $y = 3x + 8x^2 - x^3$ *se* $0 \leq x \leq 4$. **(a)** *Ache a taxa segundo a qual o operário esta pintando às* $10:00$ *horas da manhã.***(b)** *Ache o número de molduras prontas entre* 10 *e* $11:00$ *horas da manhã.*

Solução. **a)**

Temos $y = f(x)$ é uma função que depende do tempo x. No instante x_1 temos que $y = f(x_1) = 3x_1 + 8x_1^2 - x_1^3$. Suponha um lapso de tempo transcorrido h depois de x_1, então $y = f(x_1+h) = 3(x_1+h) + 8(x_1+h)^2 + (x_1+h)^3$.

A diferença

$$\frac{\triangle f}{h} = \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}$$

quando h for tão pequeno possível, determina a taxa segundo o qual o operário está pintando x_1 depois das $08:00$ da manhã.

Isto é, $\quad \triangle f(x_1) = 3[(x_1+h) - x_1] + 8[(x_1+h)^2 - x_1^2] - [(x_1+h)^3 - x_1^3] =$

$$= 3h + 8(2hx_1 + h^2) - (3hx_1^2 + 3h^2x_1 + h^3) = h[3 + 8(2x_1+h) - (3x_1^2 + 3hx_1 + h^2)]$$

então

$$\frac{\triangle f(x_1)}{h} = \frac{h[3 + 8(2x_1 + h) - (3x_1^2 + 3hx_1 + h^2)]}{h} =$$

$$3 + 8(2x_1 + h) - (3x_1^2 + 3hx_1 + h^2)$$

Quando h for tão pequeno quanto o zero, temos $\dfrac{\triangle f(x_1)}{h} = 3 + 8x_1 - 3x_1^2$. A taxa segundo o qual o operário está pintando quando $x_1 = 2$ corresponde as $10:00$ horas.

Logo, $\dfrac{\triangle f(2)}{h} = 3 + 8(2) - 3(2^2) = 7$. Portanto, a taxa segundo a qual o operário esta pintando às $10:00$ horas da manhã é de 7 quadros. □

Solução. **b)**

Até as $11:00$ horas ele pintou $y = 3(3) + 8(3^2) - 3^3 = 54$ quadros. Até as $10:00$ horas ele pintou $y = 3(2) + 8(2^2) - 2^3 = 30$ quadros. Logo entre as $10:00$ e $11:00$ horas da manhã, ele pintou $54 - 30 = 24$ quadros. □

Exemplo 2.67.

Sejam as funções $f(x) = \dfrac{x^2}{36 - x^2}$ *e* $g(x) = \sqrt{8 - 3t}$. *Achar;*

1. $D(f)$ *e* $D(g)$ ***2.*** $(f \circ g)(x)$ *e* $(\dfrac{f}{g})(x)$ *e seus respectivos domínios.*

Solução.

1. $D(f) = \mathbb{R} - \{-6,\ 6\}$ e $D(g) = (-\infty,\ 8/3]$

2. $D(f \circ g) = (-\infty,\ 8/3] - \{-\dfrac{28}{3}\}$ e $D(\dfrac{f}{g}) = (-\infty,\ 8/3] - \{-6\}$

$$(f \circ g)(x) = -\frac{8 - 3x}{28 + 3x}$$

$$(\frac{f}{g})(x) = -\frac{x^2}{(36 - x^2)\sqrt{8 - 3x}}.$$

Exercícios 2-4

1. Para quais números reais a, b, c, d a função $f(x) = \dfrac{ax+d}{cx+b}$ cumpre $f(f(x)) = x$ para todo x?

2. Se f é uma função de variável real tal que $f(x-2) = 2x^2+1$, determinar:
   1. $\dfrac{f(a+2)-f(1)}{a-3} \quad a \neq 3$ **2.** $\dfrac{f(a+2)-f(2)}{a-2} \quad a \neq 2$

3. Se $f(4x+1) = x^2+4x-5$ é função real, achar $f(5x)$.

4. Seja f função real definida por:
$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se,} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 3, & \text{se,} \quad 2 < x < 3 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = f(x+2) + f(2x)$$
   Achar D(g).

5. Seja $f\ : A \longrightarrow [0,\ 1]$. Determine o domínio de f se:
   1. $f(x) = \dfrac{|\ x+2\ |}{x+2}$ **2.** $f(x) = -x^2+4x+12$ **3.** $f(x) = \dfrac{1+2x}{3-5x}$

6. Determinar o domínio de definição das seguintes funções:
   1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$ **2.**$f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{12+x}{x-5}}$ **3.** $f(x) = \sqrt{9-6x+x^2}$
   4. $f(x) = \sqrt[4]{x^2-4x+12} + \dfrac{3x^2}{\sqrt[4]{-x-20+x^2}}$ **5.** $f(x) = \sqrt[4]{1-\sqrt{4+x^2}}$
   6. $g(x) = \begin{cases} |\ x+[|x|]\ | & \text{se,} \quad [|x|] \quad \text{é} \quad \text{par} \\ \sqrt{x+[|x|]}, & \text{se,} \quad [|x|] \quad \text{é} \quad \text{ímpar} \end{cases}$

7. A função $f(x)$ esta definida como segue: em cada um dos intervalos $n \leq x < n+1$ onde n é um inteiro positivo, $f(x)$ varia linearmente, sendo $f(n) = -1$, $f(n+\frac{1}{2}) = 0$. Construir o gráfico desta função.

8. A função f em $\mathbb{R}$ é tal que $f(2x) = 3x+1$. Determine $2.f(3x+1)$.

9. Sendo f e g duas funções tais que $f \circ g(x) = 2x+1$ e $g(x) = 2-x$. Determine $f(x)$.

10. Se $f(g(x)) = 5x-2$ e $f(x) = 5x+4$, então $g(x)$ é igual a:

11. Dadas as funções $f(x) = 4x + 5$ e $g(x) = 2x - 5k$, ocorrerá $g \circ f(x) = f \circ g(x)$ se e somente se k for igual a:

12. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ tal que $f(x-5) = 4x$. Nestas condições, pede-se determinar $f(x+5)$.

13. Sendo f e g duas funções tais que: $f(x) = ax+b$ e $g(x) = cx+d$. Sob que condições ocorrerá a igualdade $g \circ f(x) = f \circ g(x)$?

14. Sejam $f(x) = x+2$ e $g(x) = x^2+a$, determinar o valor de a de modo que $(f \circ g)(3) = (g \circ f)(a-1)$.

15. Determine duas funções f e g tais que $h = gof$ nos seguintes casos:

1. $h(x) = (x^2+3)^6$ **2**. $h(x) = 2^{\text{sen}2x}$ **3**. $h(x) = 3(x+ \mid x \mid)$

4. $h(x) = \sqrt{x+12}$ **5**. $h(x) = x^2 + 16x + 64$

6. $h(x) = \left(\dfrac{2x+5}{x-4}\right)^2$ **7**. $h(x) = \text{sen}^2 4x + 5\text{sen}4x + 2$

16. Dadas as funções $f(x) = \mid x+1 \mid$ e $g(x) = \mid 2-x \mid$. Determine $f \circ g$ e $g \circ f$.

17. Sejam f e g funções definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 5x, & \text{se,} \quad x < 2 \\ \mid x+2 \mid -2x, & \text{se,} \quad x \geq 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x+4, & \text{se,} \quad x > 2 \\ x^2 - 3x, & \text{se,} \quad x \leq 2 \end{cases}$$

Achar : **1**. $f(1) + g(1)$ **2**. $f(0).g(0)$ **3**. $(f \circ g)(2)$

4. $\dfrac{f(4)}{g(1)}$ **5**. $(f \circ g)(-3)$ **6**. $(g \circ g)(\frac{3}{2})$

18. Dada a função de produção $9p = 2q^2$, onde q é a quantidade de um insumo, o que acontece com a produção se a quantidade do insumo for duplicada? Como são então os retornos da produção?

19. Sejam $R = -2q^2 + 30q$ e $C = 3q + 72$ as funções de *Receita* e *Custo* para certo produto. **(a)** Determine o ponto de equilíbrio (break-even). **(b)** Faça os gráficos de C e R num mesmo eixo. **(c)** Determine a *função lucro* e faça seu gráfico. **(d)** Determine a função *lucro médio* e faça seu gráfico por pontos tomados no intervalo de variação de q.

20. Seja $P = 20\sqrt{x^5}$ uma função que dá a quantidade P de certo produto que é produzida em função da quantidade x de certo insumo. **(a)** Esboçar o gráfico da função.

(b) O que acontece com a produção P se a quantidade de insumo por multiplicada por 6.

21. Um laboratório, ao lançar um novo produto de beleza, estabelece uma função que dá a quantidade procurada y no mercado em função da quantidade x de caixas com certa quantidade de amostras, que foram distribuídas entre donas-de-casa. A função estabelecida é dada como $y = 300 \times (1,3)^x$. **(a)** Qual foi a procura do produto antes da distribuição da amostra?. E após a distribuição de duas caixas? E após a distribuição da quatro caixas? **(b)** Quantas caixas da amostra tem que ser distribuídas para que a quantidade procurada seja 3.000? **(c)** Esboce o gráfico da função.

22. A demanda mensal de um certo produto por consumidor é função de sua renda, de acordo com a seguinte expressão: $q = 400 - \dfrac{30.000}{y+30}$, onde y é a renda em milhares de reais e q é a quantidade do produto em gramas. **(a)** Faça o gráfico da função. **(b)** Essa função é crescente ou decrescente? As taxas crescentes ou decrescentes? Por quê? **(c)** Em que ponto corta o eixo horizontal dos x. Qual é o significado do fato?

23. Um comerciante é o representante de vendas de uma certa mercadoria em uma cidade. Vende atualmente 200 unidades e observa que a porcentagem de crescimento de vendas é de 25% ao ano. **(a)** Determine função $y = f(x)$ que dá a quantidade que será vendida em função do tempo em anos, a partir de hoje. **(b)** Quanto estará vendendo daqui a dois anos? E daqui a quatro anos?. Esboce o gráfico da função.

24. Uma firma de serviços de fotocópias tem um custo fixo de R\$800,00 por mês e custos variáveis de $0,06$ por folha que reproduz. Expresse a função custo total em função do número de páginas x copiadas por mês. Se os consumidores pagam $0,1$ por folha. Quantas folhas a firma tem que produzir para não ter prejuízo?

25. A equação de demanda de um certo produto é $q = 14 - 2p$ e a equação de oferta $q = 6p - 10$. Determine o ponto de equilíbrio.

26. Seja a função $y = x^n, \quad x > 0$. Para que valores de x esta função tem valores maiores que os de sua função inversa.

27. Qual deve ser a condição para que a função homográfica $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ coincida com sua inversa. Sabe-se que $ad \neq bc$.

28. Qual é a característica do gráfico de uma função homográfica identicamente a sua inversa ?

29. Mostre que a função $f(x) = \dfrac{x^2+2x+c}{x^2+4x+3c}$ assume qualquer valor real si $0 < c \leq 1$.

30. O peso aproximado dos músculos de uma pessoa é diretamente proporcional a seu peso corporal. **(1.)** Expresse o número de quilos do peso aproximado dos músculos de uma pessoa como função de seu peso corporal, sabendo que uma pessoa com $68\ kg$ tem peso aproximado de seus músculos $27\ kg$. **(2.)** Ache o peso muscular aproximado de uma pessoa cujo peso corporal é de $60\ kg$.

31. Um fabricante vende certo artigo aos distribuidores a R$20 por unidade para pedidos menores de 50 unidades. No caso de pedidos de 50 unidades ou mais (até 600), o preço tem um desconto de 2 centavos vezes o número encomendado. Qual é a quantidade de encomenda que proporciona maior ingresso para o fabricante?.

32. Desenhar o gráfico e determine o custo médio da função de custo total $C(q) = aq\left[\dfrac{q+b}{q+a}\right]$ onde a, b e c são constantes positivas $b < c$.

33. Uma mercearia anuncia a seguinte promoção:

    > *"Para compras entre* $100,00$ *e* $600,00$ *reais compre* $(x+100)$ *reais e ganhe* $(x/10)\%$ *de desconto na sua compra."*

    Qual a maior quantia que se pagaria à mercearia nesta promoção ?

34. Consideremos duas funções f e g definidas por:

$$f(x) = \mid x-2 \mid + \mid x-1 \mid \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{se,} \quad x \leq -1 \\ 2, & \text{se,} \quad -1 < x < 1 \\ x^2, & \text{se,} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

Determine as funções $f \circ g$ e $g \circ f$.

2.6 Outros tipos de funções reais

2.6.1 Funções implícitas

Suponhamos temos uma equação envolvendo duas variáveis digamos x e y, do tipo $f(x,y) = C$ onde C é uma constante real. Geralmente esta equação podemos representar graficamente mediante alguma curva no plano cartesiano $x0y$.

Pergunta: Esta curva pode ser o gráfico de uma função ?

Geralmente isto não acontece.

Pergunta: Existe um "*trecho*" da curva que seja possível exprimir y como função de x (ou então y como função de x)?; isto é podemos representar $f : A \longrightarrow B$ para determinados subconjuntos de números reais?.

Quando a resposta é afirmativa, diz-se que a função $f : A \longrightarrow B$ é definida implícitamente pela equação $f(x,y) = C$.

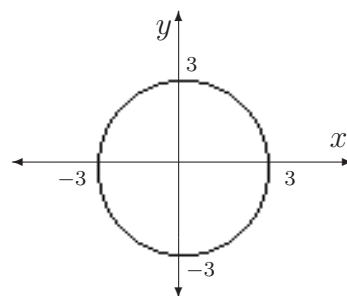



Figura 2.31:

Exemplo 2.68.

Seja a equação $x^2 + y^2 = 9$, *representada no plano cartesiano é o gráfico de uma circunferência de centro* $(0,\ 0)$ *e raio* 3 *como mostra a Figura* (2.31).

Observe que a circunferência não é o gráfico de uma função; mas podemos separar em "trechos" o domínio dessa relação para obter y *como função de* x.

i) *A função* $f : [-3,\ 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ *cujo gráfico é a semicircunferência superior ao eixo-*x.

ii) *A função* $f : [-3,\ 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = -\sqrt{9 - x^2}$ *cujo gráfico é a semicircunferência inferior ao eixo-*x.

2.6.2 Função periódica

Definição 2.19.
Dizemos que uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *é periódica quando existe um número real* $\mathbf{t} \neq 0$, *tal que para todo* $x \in \mathrm{D}(f)$, *temos:*

i) $x + \mathbf{t} \in \mathrm{D}(f)$ **ii)** $f(x + \mathbf{t}) = f(x)$

O número $\mathbf{t}$ denomina-se "*um período de f*".

O menor período positivo $\mathbf{t}$ de f quando exista, denomina-se "*o período de f*", e neste caso dizemos que f é periódica de período $\mathbf{t}$.

Exemplo 2.69.

A função mantissa $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *definida por* $f(x)=x-[|x|]$ *é periódica de período* $t=1$. *Observe que* $f(x+1)=(x+1)-[|x+1|]=x+1-[|x|]-1=x-[|x|]=f(x)$ *e não existe outro número* t *tal que* $0<t<1$ *que seja o período de* f, *o gráfico da função mantissa ilustra-se na Figura* (2.32).

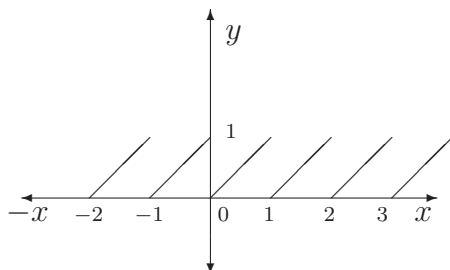



Figura 2.32:

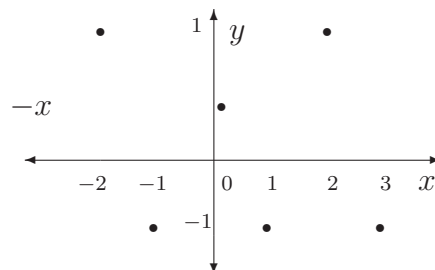



Figura 2.33:

Exemplo 2.70.

A função mantissa $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\{-1,1\}$ *definida por* $f(x)=(-1)^x$ *é periódica de período dois, seu gráfico mostra-se na Figura* (2.33)

2.6.3 Função algébrica

Definição 2.20.
Diz-se que uma função $y=f(x)$ *definida num conjunto* A, *é algébrica de grau* n, *quando ela é solução de uma equação algébrica da forma:*

$$P(x,y)=P_0(x)y_n+P_1(x)y_{n-1}+\cdots+P_{n-1}(x)y+P_n(x)=0$$

Para $n\in\mathbb{N}, n\geq 1$ *e* $P_0(x),\ P_1(x),\ \cdots,\ P_{n-1}(x),\ P_n(x)$ *polinômios de variável* x.

Exemplo 2.71.

A função $y=\sqrt[3]{x^2+1}-x$ *é algébrica, pois esta função é solução da equação* $y^3-x^2+x-1=0$.

Exemplo 2.72.

Todo polinômio $y=P(x)$ *é uma função algébrica, observe que é solução da equação* $y-P(x)=0$ *para todo* $x\in\mathbb{R}$.

2.6.4 Função par. Função ímpar

Definição 2.21.

a) Dizemos que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é "*função par*", se para todo $x \in \text{D}(f)$, temos: que $-x \in \text{D}(f)$ e $f(-x) = f(x)$ como mostra a *Figura* (2.34) na esquerda

b) Dizemos que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é "*função ímpar*", se para todo $x \in \text{D}(f)$, temos: que $-x \in \text{D}(f)$ e $f(-x) = -f(x)$ como mostra a *Figura* (2.34) na direita.

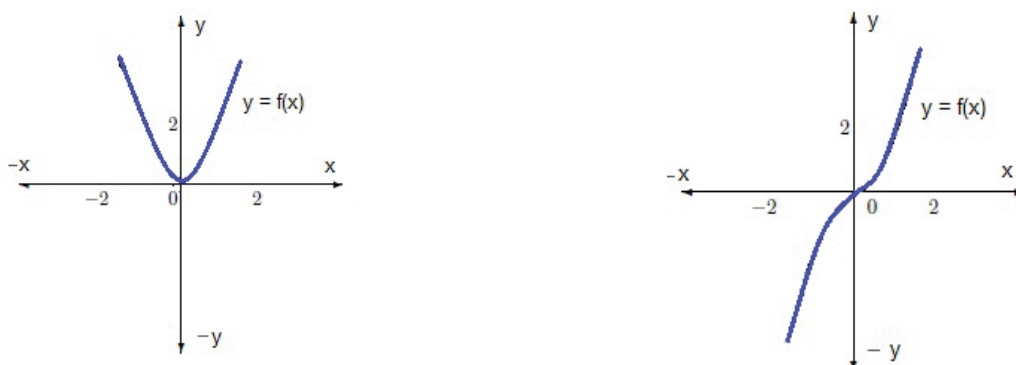



Figura 2.34:

Exemplo 2.73.

A função $f(x) = x^4$, para $x \in \mathbb{R}$ é função par, pois para todo $x \in \mathbb{R}$ e $-x \in \mathbb{R}$ temos $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$.

Exemplo 2.74.

A função $f(x) = x^5$, para $x \in \mathbb{R}$ é função ímpar, pois para todo $x \in \mathbb{R}$ e $-x \in \mathbb{R}$ temos $f(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -f(x)$.

Observação 2.8.

a) O gráfico de toda função ímpar é simétrica respeito do origem de coordenadas.

b) O gráfico de toda função par é simétrica respeito do eixo-y.

Exemplo 2.75.

Classifique as funções abaixo em pares, ímpares ou sem paridade:

a) $f(x) = 2x$ **b)**$g(x) = x^2 - 1$ *c)* $h(x) = x^2 - 5x + 6$

Solução.

a) $f(-x) = 2(-x) = -2x \quad \Rightarrow \quad f(-x) = -f(x)$, portanto f é ímpar.

b) $g(x) = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad g(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad g(x) = g(-x)$, portanto g é par.

c) $h(x) = x^2 - 5x + 6$ e $h(-x) = (-x)^2 - 5(-x) + 6 = x^2 + 5x + 6$

Como $h(x) \neq h(-x)$, então h não é par; temos também $-h(x) \neq h(-x)$, logo h não é ímpar.

Por não ser par nem ímpar, concluímos que h é função sem paridade.

2.6.5 Função monotônica

Definição 2.22.
Sejam I um intervalo da reta $\mathbb{R}$ e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ função, sendo $I \subseteq A$

a) *A função f é estritamente crescente no intervalo I, se para todo $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$.*

b) *Uma função f é estritamente decrescente no intervalo I, se para todo $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$ então $f(x_1) > f(x_2)$.*

c) *Uma função f é crescente no intervalo I, se para todo x_1, $x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \leq f(x_2)$.*

d) *Uma função f é decrescente no intervalo I, se para todo $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \geq f(x_2)$.*

Exemplo 2.76.

A função definida por $f(x) = 5$ é crescente e não crescente em todo seu domínio, esta função não é estritamente crescente nem estritamente decrescente.

Exemplo 2.77.

A função definida por $f(x) = 5x + 2$, é estritamente crescente em todo seu domínio. A função $g(x) = -x^3$ é estritamente decrescente em todo seu domínio.

Em qualquer um dos casos, se diz que a função f é monotônica no intervalo I; nos casos **a)** e **b)** ela também se diz monotônica estrita no intervalo I.

Exemplo 2.78.

A função: $f(x) =| x^2 - 9 |$ é estritamente crescente no intervalo $[-3, 0] \cup [3, +\infty)$ e estritamente decrescente no intervalo $(-\infty, -3] \cup [0, 3]$.

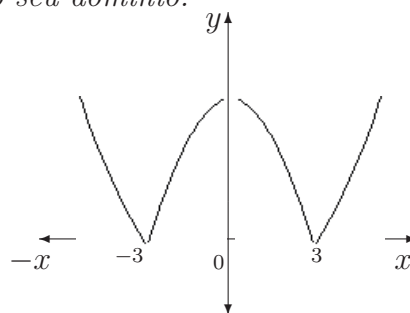



Figura 2.35:

O gráfico desta função $f(x)$ *mostra-se na Figura* (2.35).

Observação 2.9.

A função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *é estritamente crescente(decrescente), se e somente se,* $-f$ *é estritamente decrescente (crescente).*

Propriedade 2.1.

Se a função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *é estritamente monotônica, então* f *é injetiva.*

Demonstração.

Suponhamos que a função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ seja estritamente monotônica e sejam $a,\ b \in I$ de modo que $a \neq b$. Logo $a < b$ ou $b < a$.

Suponhamos que $a < b$ e f seja estritamente crescente, então $f(a) < f(b)$, de onde $f(a) \neq f(b)$.

Em qualquer dos dois casos segue que $f(a) \neq f(b)$.

Portanto, f é injetiva. □

2.6.6 Função limitada

Definição 2.23.

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real com domínio $\mathrm{D}(f)$.

a) Dizemos que a função f é *"limitada superiormente"*, quando existe $M_1 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M_1 \quad \forall\, x \in \mathrm{D}(f)$.

b) Dizemos que a função f é "*limitada inferiormente*", quando existe $M_2 \in \mathbb{R}$ tal que $M_2 \leq f(x) \quad \forall\, x \in \mathrm{D}(f)$.

c) Se uma função for limitada superiormente e inferiormente, diz-se que ela é "*limitada*", em consequência temos que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\mid f(x) \mid \leq M, \quad \forall\, x \in \mathrm{D}(f)$, sendo $M = \max.\{ \mid M_1 \mid, \mid M_2 \mid \}$.

d) Se existe $x \in \mathrm{D}(f)$ tal que $\mid f(x) \mid \geq M$ para algum M suficientemente grande, dizemos que $f(x)$ é *"função não limitada"*.

Exemplo 2.79.

i) *A função* $f(x) = x^x$ *não é limitada em* $\mathbb{R}$, *pois imagine, para um elemento bastante "grande"* $x \in \mathbb{R}$ *do domínio, não conseguiriamos obter outro* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* f *seja limitada.*

Portanto, $f(x) = x^x$ é não limitada (é ilimitada).

ii) *A função $g(x) = \text{sen} x$ é limitada, sabe-se que que $|g(x)| \leq 1$.*

Seja $A \subseteq \text{D}(\mathbb{R})$, se f é limitado para todo $x \in A$, dizemos que f é um conjunto limitado em A.

Definição 2.24.

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real com domínio $\text{D}(f)$.

a) *Se uma função f for limitada superiormente, o menor dos limites superiores da $\text{Im}(f)$ denomina-se "supremo da função", e indica-se com: $\sup\limits_{x \in \text{D}(f)} .f(x)$*

b) *Se a função f é limitada inferiormente, o maior dos limites inferiores da $\text{Im}(f)$ denomina-se ínfimo da função, e indica-se com: $\inf\limits_{x \in \text{D}(f)} .f(x)$.*

Exemplo 2.80.

i) *Seja a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, o ínfimo $\inf\limits_{x \in \text{D}(f)} .f(x) = 0$. Esta função não tem supremo, pois o $\sup\limits_{x \in \text{D}(f)} .f(x) = \infty$*

ii) *Seja $g : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, e $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$. Aqui, $\sup\limits_{x \in \text{D}(f)} .f(x) = 0$ e o infimo não existe.*

iii) *Seja $h : (2, 6) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = (x - 3)^2 + 1$, temos $\inf\limits_{x \in \text{D}(f)} .f(x) = 1$ e $\sup\limits_{x \in \text{D}(f)} .f(x) = 10$*

Definição 2.25.

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real com domínio $\text{D}(f)$.

a) *Se o supremo do conjunto $\text{Im}(f)$ é tal que $\sup\limits_{x \in \text{D}(f)} .f(x) \leq f(\alpha), \quad \forall\, \alpha \in \text{D}(f)$, o supremo é chamado de máximo da função f, e indica-se com: $\max\limits_{x \in \text{D}(f)} .f(x)$.*

b) *Se o ínfimo do conjunto $\text{Im}(f)$ é tal que $f(\beta) \leq \inf\limits_{x \in \text{D}(f)} .f(x), \quad \forall\, \alpha \in \text{D}(f)$, o ínfimo é chamado de mínimo da função f, e indica-se com: $\min\limits_{x \in A} .f(x)$.*

Exemplo 2.81.

1. A função constante $f(x) = k, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}(k$ constante) é limitada observe, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} .f(x) = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} .f(x) = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} .f(x) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}} .f(x) = k$.

2. A função $h(x) = x^2$ definida no intervalo $A = (-2, 3)$ é limitada observe, $\sup\limits_{x\in A} .h(x) = 9$ e $\inf\limits_{x\in A} .h(x) = 0 = \min\limits_{x\in A} .h(x)$ porémnão existe $\max\limits_{x\in A} .h(x)$.

3. A função $g(x) = x^2$ definida no intervalo $A = [-2, 3]$ é limitada observe, $\sup\limits_{x\in A} .h(x) = 9 = \max\limits_{x\in A} .h(x)$ e $\inf\limits_{x\in A} .h(x) = 0 = \min\limits_{x\in A} .h(x)$.

2.6.7 Função elementar

Definição 2.26. *Função elementar.*
Uma função elementar é aquela que obtém-se mediante um número finito de operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, e composição de funções como por exemplo: as funções constantes; a função potência $y = x^n$; a função exponencial $y = a^x$; as funções logarítmicas; trigonométricas e trigonométricas inversas.

Sejam $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n$ funções definidas num mesmo conjunto A, e $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ números reais sendo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.27. *Combinação linear finita.*
A função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f = a_1f_1 + a_2f_1 + a_3f_3 + \cdots + a_nf_n$ é denominada uma combinação linear finita de $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n$.
Logo, f é uma função elementar.

Exemplo 2.82.

Mostre que a função $f(x) = (x+3)^n$ podemos escrever como uma combinação linear finita.
Demonstração.

Sabe-se pelo Binômio de Newton que

$$f(x) = (x+3)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \times x^{n-k} \cdot 3^k =$$

$$= x^n + 3nx^{n-1} + \frac{3^2n(n-1)}{2!}x^{n-2} + \cdots + \frac{3^{n-2}n(m-1)}{2!} + \frac{3^{n-1}n}{1} + 3^n$$

Escrevendo $f_k(x) = x^{n-k}$, e $a_k = 3^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, então segue que

$$f(x) = (x+3)^n = a_1 f_1(x) + a_2 f_1(x) + a_3 f_3(x) + \cdots + a_n f_n(x)$$

Logo, f é denominada uma combinação linear finita.

Exemplo 2.83.

O preço a pagar pela locação de um automóvel é composto de duas partes: uma tarifa fixa diária de $R\$40,00$ *e uma quantia de* $R\$0,15$ *por quilômetro rodado. Mostre que o preço a ser pago pela locação de um destes automóveis por* 5 *dias e rodando* $1200\,km$ *será, em reais, igual a* $R\$380,00$.

Solução.

Seja x o número de dias, e y os quilômetros rodados, então a função que descreve o fenômeno é $f(x,\ y) = 40x + 0,15y$, logo quando $x = 5$ e $y = 1200$

$$f(5,\ 1200) = 40(5) + (0,15)(1200) = 200 + 180 = 380$$

Exemplo 2.84.

Um grupo de estudantes dedicados á confeição de artesiana tem um gasto fixo de $R\$600.00$, *e em material gasta* $R\$25.00$ *por unidade produzida. Cada unidade será vendida por* $R\$175.00$.

1. *Quantas unidades os estudantes terão que vender para existir equilíbrio?*

2. *Quantas unidades os estudantes terão vender para obter lucro de* $R\$450.00$*?*

Solução.

Sejam x unidades produzidas, o gasto total para a produção destas unidades é dada pela função $g(x) = 600 + 25x$, sendo que o ingresso pela venda destas x unidades é dada pela função $f(x) = 175x$

(a) Para acontecer equilíbrio devemos ter que: $g(x) = f(x)$, então $600 + 25x = 175x$ de onde $600 = 150x$ o que resulta $x = 4$.

Portanto, tem que ser vendidas quatro unidades para existir equilíbrio.

(b) O lucro é dada pela expressão $f(x) = 450 + g(x)$, isto é $175x = 450 + (600 + 25x)$ de onde resulta $150x = 1050$, logo $x = 7$.

Vendendo sete unidades obtém-se lucro de 450 reais.

Exercícios 2-5

1. Dada a função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - 1}}$ determinar sua função inversa $f^{-1}(x)$ e a imagem de $f(x)$.

2. Mostre que, para $x > 0$ a equação $y+ \mid y \mid -x- \mid x \mid = 0$ determina a função cujo gráfico será a bissetriz do primeiro ângulo coordenado, entanto para $x \leq 0$ são as coordenadas de todos os pontos do terceiro quadrante (incluídos seus pontos de fronteira) as que cumprem a equação dada.

3. Dadas as seguintes funções reais, determine caso exista, sua função inversa.

   1. $f(x) = x^2 - 5x + 6$ **2**. $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ **3**. $f(x) = \dfrac{5}{7 - 2x}$
   4. $h(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ **5**. $s(x) = x+ \mid x + 1 \mid$ **6**. $t(x) = \sqrt{x + 2} - 5$

4. Se $f(x) = x - 2a$, determinar os valores da constante a de modo que $f(a^2) = f^{-1}(a - 2)$.

5. Seja $f : A \longrightarrow [-9, -1)$ definida por $f(x) = \dfrac{4 + 3x}{1 - 3x}$:
   1. Determinar A. **2**. Mostre que f é $1 - 1$. **3**. f é sobre?.

6. Se $f(x) = x + 2c$ e $f(c^2) = f^{-1}(c)$, achar o valor de:
   1. $f(0) \cdot f^{-1}(0)$ **2**. $\dfrac{f(1)}{f^{-1}(1)}$.

7. Construir o gráfico e determinar a imagem das seguintes funções:

   1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}, & \text{se, } x \neq -2 \\ 3, & \text{se, } x = -2 \end{cases}$

   2. $f(x) = \begin{cases} \mid 4 - x^2 \mid, & \text{se, } \mid x \mid < 3 \\ 5, & \text{se, } \mid x \mid \geq 3 \end{cases}$

   3. $f(x) = \begin{cases} \mid x + 3 \mid, & \text{se, } -4 \leq x \leq 0 \\ 3 - x^2, & \text{se, } 0 < x \leq 4 \\ -2, & \text{se, } \mid x \mid > 4 \end{cases}$

   4. $f(x) = \begin{cases} (x - 1)^2, & \text{se, } 0 \leq x < 2 \\ 10 - x^2, & \text{se, } 2 \leq x \leq 3 \\ -2, & \text{se, } x < 0 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} -\mid x+4 \mid, & \text{se,} \quad -8 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4x - 2, & \text{se,} \quad 2 < x \leq 5 \\ -x^2 + 10x - 22, & \text{se,} \quad 5 < x \leq 8 \\ -3, & \text{se,} \quad \mid x \mid > 8 \end{cases}$

8. Construir o gráfico, determinar a imagem e verifique se as seguintes funções são inversíveis :

1. $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & \text{se, } 0 \leq x < 2 \\ 10 - x^2, & \text{se, } 2 \leq x \leq 3 \\ -2, & \text{se, } x < 0 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$ **2**. $f(x) = 5(x + \mid x+1 \mid)$

3. $f(x) = \begin{cases} \mid x+3 \mid, & \text{se, } -4 \leq x \leq 0 \\ 3 - x^2, & \text{se, } 0 < x \leq 4 \\ -2, & \text{se, } \mid x \mid > 4 \end{cases}$ **4**. $f(x) = x^2 - 5x + 6$

5. $f(x) = \begin{cases} \mid x+4 \mid, & \text{se, } -8 \leq x \leq 2 \\ x+2, & \text{se, } 2 < x \leq 5 \\ x^3, & \text{se, } 5 < x \leq 8 \\ -3, & \text{se, } \mid x \mid > 8 \end{cases}$ **6**. $f(x) = \begin{cases} \mid 4 - x^2 \mid, & \text{se, } \mid x \mid < 3 \\ 5, & \text{se, } \mid x \mid \geq 3 \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} -\mid x+4 \mid, & \text{se, } -8 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4x - 2, & \text{se, } 2 < x \leq 5 \\ 10x - x^2 - 22, & \text{se, } 5 < x \leq 8 \\ -3, & \text{se, } \mid x \mid > 8 \end{cases}$ **8**. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2}, & \text{se, } x \neq -2 \\ 3, & \text{se, } x = 2 \end{cases}$

9. Determine dois conjuntos A e B para que a equação a seguir determine uma função implícita $f : A \longrightarrow B$.

1. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ **2**. $x^2 - y^2 = 1$ **3**. $x^2 - 3y + y^2 - 9y = -8$

4. $\dfrac{x+1}{x} = y$ **5**. $\mid x \mid + \mid y \mid = 2$ **6**. $yx^2 - x - 9y = 0$

10. Determine valores de a e b na expressão da função $f(x) = ax^2 + bx + 5$ para os quais seja válida a identidade $f(x+1) - f(x) = 8x + 3$.

11. Verifique se a função a seguir é par o ímpar justificando sua resposta.

1. $f(x) = -x^3 + x$ **2**. $f(x) = x \cdot e^x + x^2$ **3**. $f(x) = -x + x^3$

4. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ **5**. $h(x) = \dfrac{x}{\mid x \mid}$ **6**. $w(t) = x \cdot e^{t^2}$

12. Se o conjunto A é simétrico em relação à origem (se $x \in A$, então $-x \in A$) para

toda $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ prove que a função:

1. $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ é par. **2**. $\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ é ímpar.

13. Apresente cada uma das seguintes funções como soma de uma função par e outra ímpar:

    1. $y = x^3 + 3x + 2$ **2**. $y = 1 - x^3 - x^4 - 2x^5$

14. Mostre que o produto de duas funções pares ou ímpares é uma função par e, o produto de uma função par por uma ímpar é função ímpar.

15. Seja n natural ímpar. Mostre que $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é estritamente crescente no intervalo $[0,\ +\infty)$.

16. Seja $f(x) = \dfrac{1}{x}$ para $x \in I = (0,\ 1]$. Pergunta-se:

    1. Esta função é limitada superiormente?

    2. Esta função é limitada inferiormente?

    3. Existe $\max\limits_{x\in I}.f(x)$? **4.** Existe $\min\limits_{x\in I}.f(x)$?

17. Análogo ao exercício anterior para a função:

    1. $f(x) = x^3 - x$ quando $x \in I = [-4,\ 4]$.

    2. $f(x) = x^2 - 2x + 1$ quando $x \in I = [-4,\ 4]$.

18. Mostre que $\dfrac{2x}{x+2}$ é estritamente crescente nos intervalos $(-\infty,\ -2)$ e $(-2,\ +\infty)$.

19. Mostre que toda função estritamente crescente ou estritamente decrescente é injetiva.

20. Seja n número natural ímpar, mostre que $f(x) = \sqrt[n]{x+1}$ é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

21. Sendo $f(x) = \text{sen}x$ e $g(x) = \log x$, pede-se determinar o valor de $g[f(\dfrac{\pi}{2})]$

22. Determine o possível valor para $n \in \mathbb{Z}$ para o qual $2^x > x^n$ para todas as $x \geq 100$.

23. Seja $f(x) = \text{Ln}(x)$. Mostre que $f(x) + f(x+1) = f(x(x+1))$.

24. Se f é uma função tal que $f(1) = a$, $f(p) = b$ e $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$, $\forall\, x,\ y \in \mathbb{R}$, então $f(2+p)$ é igual a:

25. Sejam $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções. Demonstre que:

    1. Se f e g são injetivas, então $g \circ f$ é injetiva?

2. Se f e g são sobrejetivas, então $g \circ f$ é sobrejetiva?

3. Se $g \circ f$ é injetiva, então f é injetiva.

4. Se $g \circ f$ é sobrejetiva, então g é sobrejetiva.

26. Em um certo clube de futebol, a taxa anual cobrada aos sócios é de R\$300, 00 e o sócio pode utilizar campo de futebol pagando R\$2, 00 por hora. Em outro clube, a taxa é R\$200, 00 e cobram R\$3, 00 por hora de uso do campo de futebol. Considerando as questões financeiras; que clube você escolheria ?

27. As funções de oferta e demanda de um certo produto são respectivamente $S(p) = p - 10$ e $D(p) = 5.600p^{-1}$.

    1. Calcular o preço de equilíbrio e o número correspondente de unidades em oferta e demanda.

    2. Construía as gráficos das funções num mesmo par de eixos.

28. Um número de dois algarismos excede em uma unidade o sêxtuplo da soma de seus algarismos desse número. Se a ordem dos algarismos desse número for invertida, o novo número terá nove unidades a menos do que o número original. Encontrar o número original.

29. As equações de oferta e demanda numa determinada fábrica estão dadas por $q = 24 - p$ e $q = 10\,p - 20$, funções lineares do preço. Determine a quantidade de equilíbrio.

30. A folha de pagamento mensal de uma empresa é diretamente proporcional ao número de trabalhadores, sabendo que 20 dos trabalhadores tem uma folha de pagamento de R\$3000, 00.

    1. Expresse o valor da folha de pagamento mensal como função do número de trabalhadores;

    2. Qual a folha de pagamento para 18 trabalhadores?

2.7 Funções transcendentes

Chama-se função transcendente a aquela função que não é algébrica. São funções transcendentes:

a) A função exponencial e sua inversa, a função logaritmo.

b) As funções trigonométricas e suas inversas.

2.7.1 A função exponencial de base a

Definição 2.28.
Se $a > 0$ *e* $r = \dfrac{p}{q}$ *é um número racional define-se* $a^r = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$.

Propriedade 2.2.

Para qualquer par de números $r,\ s \in \mathbb{Q}$ *temos :*

a) $a^r.a^s = a^{r+s}$ **b)** $(a^r)^s = a^{rs}$ **c)** $(ab)^r = a^r.b^r$

d) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r} \quad b \neq 0$ **e)** $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

Definição 2.29. *Função exponencial.*
Seja $a \neq 1$ *um número real positivo. A função* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = a^x$ *é chamada função exponencial de base* **a**.

O domínio de esta função é $D(f) = \mathbb{R}$ e sua imagem $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$. Para seu gráfico consideremos dois casos como se observa na *Figura* (2.36).

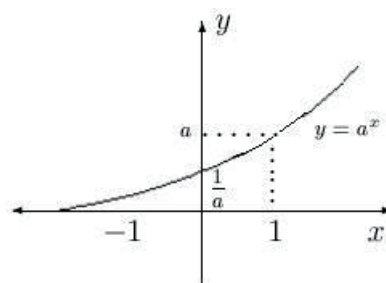



Figura 2.36: Função exponencial

Propriedade 2.3.

E1) Se $0 < a < 1$, a função $f(x) = a^x$ é decrescente em todo seu domínio.

E2) Se $a > 1$, a função $f(x) = a^x$ é crescente em todo em seu domínio.

E3) O gráfico da função exponencial de base a passa pelo ponto $P(0,\ 1)$.

E4) Se $0 < a < 1$, então : a^x tende para $+\infty$ quando x tende para $-\infty$, e a^x tende para $-\infty$ quando x tende para $+\infty$.

E5) Se $a > 1$ então : a^x tende para $+\infty$ quando x tende para $+\infty$, e a^x tende para $-\infty$ quando x tende para $-\infty$.

E6) $a^{x+z} = a^x.a^z \quad$ e $\quad a^{x-z} = \dfrac{a^x}{a^z}$

Exemplo 2.85.

Sejam $f(x) = \dfrac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ *e* $g(x) = \dfrac{1}{2}(a^x - a^{-x})$ *mostre que:*

i) $f(x+y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$ **ii)** $g(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$

Solução. ***i)***

Temos:

$$f(x+y) = \frac{1}{2}(a^{x+y} + a^{-x-y}) \tag{2.1}$$

Por outro lado:

$f(x)\cdot f(y) = \dfrac{1}{2}(a^x + a^{-x})\cdot\dfrac{1}{2}(a^y + a^{-y}) = \dfrac{1}{4}(a^{x+y} + a^{x-y} + a^{-x+y} + a^{-x-y)}.$

$g(x)\cdot g(y) = \dfrac{1}{2}(a^x - a^-x)\cdot\dfrac{1}{2}(a^y - a^{-y}) = \dfrac{1}{4}(a^{x+y} - a^{x-y} - a^{-x+y} + a^{-x-y}).$

Logo

$$f(x)\cdot f(y) + g(x)\cdot g(y) = \frac{1}{4}(2a^{x+y} + 2a^{-x-y}) = \frac{1}{2}(a^{x+y} + a^{-x-y}) \tag{2.2}$$

De (2.1) e (2.2) temos $f(x+y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$ □

Solução. **ii)**

Temos

$$g(x+y) = \frac{1}{2}(a^{x+y} - a^{-x-y}) \tag{2.3}$$

Por outro lado;

$f(x)g(y) + f(y)g(x) = \dfrac{1}{4}(a^x + a^{-x})(a^y - a^{-y}) + (a^y + a^{-y})(a^x - a^{-x}) =$

$= \dfrac{1}{4}[(a^{x+y} - a^{x-y} + a^{-x+y} - a^{-x-y}) + (a^{y+x} - a^{y-x} + a^{-y+x} - a^{-y-x})] =$

$$\frac{1}{4}(2a^{x+y} - 2a^{-x-y}) = \frac{1}{2}(a^{x+y} - a^{-x-y}) \tag{2.4}$$

De (2.3) e (2.4) temos $g(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$.

2.7.2 Função logarítmica

A função logarítmica é a função inversa da função exponencial.

Das propriedades $E1$ e $E2$ conclui-se que a função exponencial de base **a** dada por $f(x) = a^x$ quando $a > 0$ e $\mathbf{a} \neq 1$ é injetiva em seu domínio $\mathbb{R}$ e portanto admite função inversa, chamada "*Função logarítmica de base a*" e está definida pela função $g : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \log_a x$.

Seu domínio é $\text{D}(g) = (0, +\infty)$ e sua imagem $\text{Im}(g) = \mathbb{R}$.

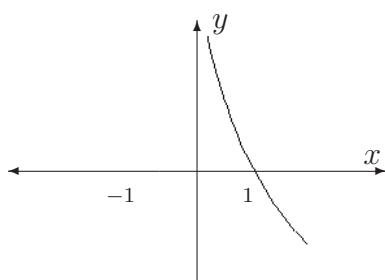
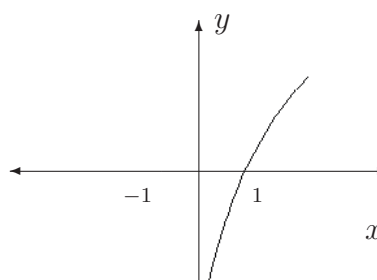
Na *Figura* (2.37) mostra-se o gráfico de $g(x) = \log_a x$ se $0 < a < 1$. Na *Figura* (2.38) se mostra o gráfico de $g(x) = \log_a x$ quando $a > 1$.

Quando $0 < a < 1$ — Quando $a > 1$

Figura 2.37: — Figura 2.38:

Por definição de função inversa, temos:

1) $f(g(x)) = x, \quad \forall\, x \in (0, +\infty)$ ou $a^{\log_a x} = x \quad \forall\, x \in (0, +\infty)$.

2) $g(f(x)) = x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ ou $\log_a(a^x) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Em resumo: $a^y = x$ se, e somente se $y = \log_a x$.

Por exemplo, $3^4 = 81$ se, e somente se $4 = \log_3(81)$

Propriedade 2.4. *Função logarítmica de base* **a**.

L1) Se $0 < a < 1$, a função $g(x) = \log_a x$ é decrescente em $\mathbb{R}^+$.

L2) Se $a > 1$, a função $g(x) = \log_a x$ é crescente em $\mathbb{R}^+$.

L3) Se A, B e N são números reais positivos, então:

a) $\log_a(A \times B) = \log_a A + \log_a B$ **b)** $\log_a\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log_a A - \log_a B$

c) $\log_{a^k}(A^B) = \left[\dfrac{B}{k}\right]\log_a A$ **d)** $\log_a(A^r) = r \cdot \log_a A \qquad r \in \mathbb{R}$

e) $\log_B A = \dfrac{\log_c A}{\log_c B}$ (Fórmula de mudança de base)

L4) O gráfico de toda a função logarítmica passa por $P(1,\ 0)$.

L5) Se $0 < a < 1$, então: tende para $+\infty$ quando x tende para zero (pela direita), e tende para $-\infty$ quando x tende para $+\infty$.

L6) Se $a > 1$, então : $\log_a x$ tende para $-\infty$ quando x tende para zero (pela direita), e $\log_a x$ tende para $+\infty$ quando x tende para $+\infty$.

Demonstração. L3-(e)

Suponha $z = \log_B A$, então $B^z = A$. Considerando logaritmo na base c temos: $\log_c B^z = \log_c A$ da Propriedade (L3-d) temos $z \cdot \log_c B = \log_c A$.

Logo $z = \dfrac{\log_c A}{\log_c B}$ isto é $\log_B A = \dfrac{\log_c A}{\log_c B}$.

Aplicações

Exemplo 2.86.

Uma rampa para manobras de "skate" de altura $4\,m$ *é representada pelo esquema da Figura* (2.39). *Se a parte curva pudesse ser associada a uma função exponencial, como seria esta função?*

Solução.

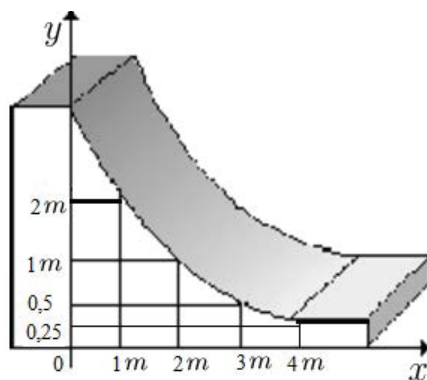



Figura 2.39:

Observe, podemos obter a seguinte tabela de valores:

x	$0m$	$1m$	$2m$	$3m$	$4m$
$f(x)$	$4m$	$2m$	$1m$	$0,5m$	$0,25m$

Portanto $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}$, é uma função exponencial.

Exemplo 2.87.

Determine o domínio de definição da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left[\dfrac{3-5x}{x+7}\right]$.

Solução.

Da definição da função logaritmo temos $\dfrac{3-5x}{x+7} > 0$ isto é $\dfrac{-5(x-\frac{3}{5})}{(x+7)} > 0$. Onde o domínio $D(f) = (-7, \dfrac{3}{5})$. □

Exemplo 2.88.

Se a *e* b *são soluções inteiras do sistema:* $2^x = 2^{10-y}$ *e* $\log_2 x + \log_2 y = 4$*, então* $2^a + 2^b$ *é igual a:*

Solução.

Como a e b são soluções do sistema então $2^a \cdot 2^{b-10} = 1$ e $\log_2 a + \log_2 b = 4$ de onde $2^{a+b} = 2^{10}$ e $\log_2(ab) = 4 \Rightarrow a + b = 10$ e $ab = 2^4 = 16$; isto cumpre se $a = 8$ e $b = 2$.

Portanto $2^a + 2^b = 2^8 + 2^2 = 260$.

Exemplo 2.89.

*Um juiz determinou o pagamento de uma indenização até certa data. Determinou também que, caso o pagamento não fosse feito, seria cobrada uma multa de R$*$3,00$ *que dobraria a cada mês de atraso. Em quantos mêses de atraso essa multa seria superior a* $600.000,00$ *reais?*

Solução.

A multa determinada pelo juiz pode parecer pequena, se o atraso no pagamento for de poucos dias. Mas ela cresce com uma rapidez muito grande. Chamando de x o número de dias de atraso no pagamento, o valor da dívida será 3^x . Veja:

1 mês de atraso $\Rightarrow$ $x = 1$ $\Rightarrow$ multa $= 3^1 = 3$

2 mês de atraso $\Rightarrow$ $x = 2$ $\Rightarrow$ multa $= 3^2 = 9$

3 mês de atraso $\Rightarrow$ $x = 3$ $\Rightarrow$ multa $= 3^3 = 27$, e assim por diante.

Como vemos, as multas crescem em progressão geométrica.

Devemos calcular em que mês essa multa atinge $600.000,00$ reais, ou seja, devemos resolver a equação: $3^x = 600.000,00$.

Aplicando logaritmos,

$$\log 3^x = \log 600.000 = \log(6 \times 10^5) = \log 6 + 5 \cdot \log 10$$

como $\log 10 = 1,\ \log 6 = \log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3$

$$x \log 3 = \log 2 + \log 3 + 5 \quad \Rightarrow \quad x - 1 = \frac{\log 2 + 5}{\log 3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5,301}{0,478} = 11,11$$

Portanto, concluímos, no 11^o mes de atraso a multa terá passado de $600.000,00$ reais reais.

Exemplo 2.90.

Em uma determinada cidade a taxa de crescimento populacional e de 4% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população desta cidade irá duplicar, se a taxa de crescimento continuar a mesma?

Solução.

Seja P_0 a população do ano-base. Após um ano será $P_0(1,04) = P_1$. A população após dois anos será $P_0(1,04)^2 = P_2$, e assim por diante.

A população após n anos será $P_0(1,04)^n = P_n$

Vamos supor que a população duplica em relação ao ano-base após n anos, temos:

$$P_n = 2P_0 \quad \Rightarrow \quad P_0(1,04)^n = 2P_0 \quad \Rightarrow \quad n \log 1,04 = \log 2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{\log 1,04}{\log 2} = \frac{0,01703}{0,30103} \approx 0,0566$$

Assim, temos que a população duplica em aproximadamente $P_0(1,04)^{0,0566}$ anos.

Exercícios 2-6

1. Nos seguintes exercícios resolva para x.

1. $\log_{10} 10000 = x$	**2**. $\log_{10} 0,01 = x$	**3**. $\log_4 \left[\dfrac{1}{256}\right] = x$
4. $\log_x 81 = 3$	**5**. $e^{\text{Ln}x} = \sqrt{3}$	**6**. $x^2 - 8x = \log_4(256)^{-1}$
7. $\log_2 x = -5$	**8**. $\text{Ln}x = -2$	**9**. $\log_{35} x + \log_{35}(x+2) = 1$

2. Traçar o gráfico para as seguintes funções:

1. $y = -(6)^x$	**2**. $y = 4^x$	**3**. $y = \left[\dfrac{5}{4}\right]^x$
4. $y = (\sqrt{3})^x$	**5**. $y = \pi^{-2x}$	**6**. $y = -(2^{-x}$
7. $\log_4 x^2$	**8**. $\log_3(x-1)$	**9**. $\log_e e^x$

3. Determine se as seguintes funções dadas são inversas uma da outra esboçando seus gráficos no mesmo sistema de eixos. Calcular seu domínio e imagem para cada uma das funções:

1. $f(x) = 2e^x \quad g(x) = \text{Ln}\sqrt{x}$	**2**. $f(x) = e^x + 1 \quad g(x) = \text{Ln}(x-1)$
3. $f(x) = e^{2x+1} \quad g(x) = 1 - \text{Ln}2x$	**4**. $f(x) = e^{3x} \quad g(x) = \text{Ln}x^{-3}$

4. Resolver as seguintes equações:

1. $x = \log_{\frac{1}{6}} 36$	**2**. $x = \log_{3\sqrt{2}} \cos 30^o$	**3**. $x = \log_{2^3} 5^{\sqrt{2}}$
4. $\log_{25} x = 3$	**5**. $x = \log_{2^x}(\sqrt[3]{25})^4 = 6$	**6**. $x^{x-1} = \dfrac{1}{27}$
7. $x^{(x-2)} = \log 10\sqrt[3]{10}$	**8**. $\log_x 10\sqrt[3]{10} = \dfrac{4}{3}$	**9**. $\dfrac{1}{3}\log_{\frac{1}{4}} x = \dfrac{1}{2}$

5. Mostre que as seguintes funções dadas são inversas uma da outra esboçando seus gráficos no mesmo sistema de eixos. Calcular seu domínio e imagem para cada uma das funções.

1. $f(x) = e^{2x} \quad g(x) = \text{Ln}\sqrt{x}$	**2**. $f(x) = e^x - 1 \quad g(x) = \text{Ln}(x+1)$

3. $f(x) = e^{x-1}$ $g(x) = 1 + \text{Ln}x$ **4.** $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$ $g(x) = \text{Ln}x^3$

6. Se $f(x) = \text{Ln}\left[\dfrac{1-x}{1+x}\right]$ mostre que $f^{-1}(x) = -\left[\dfrac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{e^{x/2} + e^{-x/2}}\right]$.

7. Uma função $y = f(x)$ esta dada pela equação $y^2 - 1 + \log_2(x-1) = 0$. Determine o domínio de definição da função, e defina a função inversa $f^{-1}(x)$.

8. Se $f(x) = 4^x$ e x_1, x_2 e x_3 são três números em progressão aritmética então demonstrar que $f(x_1)$, $f(x_2)$ e $f(x_3)$ estão em progressão geométrica. Qual é a razão ?

9. Suponha que a t horas da madrugada a temperatura de uma cidade seja, $C(t) = -\dfrac{t^2}{7} + 4t + 8$ graus centígrados. **a)** Que temperatura tinha as 14 horas ? **b)** Em que tanto aumentou ou diminuiu a temperatura, entre 6 e 7 horas?

10. Suponha que o custo total para fabricar q unidades de um certo produto seja dada pela função $C(q) = q^3 - 30q^2 + 400q + 500$.

    1. Calcular o custo de fabricação de 20 unidades.

    2. Calcular o custo de fabricação da 20^a unidade.

11. A folha de pagamento $(F.P.)$ diária de uma equipe de trabalho é diretamente proporcional ao número de trabalhadores (T), e uma equipe de 12 trabalhadores tem uma folha de pagamento de R$540.

    1. Expresse o valor total da folha de pagamento diária como função do número de trabalhadores.

    2. Qual a folha de pagamento de uma equipe de 15 trabalhadores.

12. Numa cidade de 70.000 habitantes a taxa de crescimento de uma epidemia é conjuntamente proporcional ao número de pessoas infectadas e ao número de pessoas não infectadas.,

    1. Se a epidemia esta crescendo a razão de 20 pessoas por dia quando 100 pessoas estão infectadas, expresse a taxa de crescimento da epidemia em função de número de pessoas infectadas.

    2. Quão rápido está se espalhando a epidemia quando 400 pessoas estão infectadas?

2.7.3 Funções trigonométricas

Em matemática, as funções trigonométricas são funções angulares, importantes no estudo dos triângulos e na modelação de fenômenos periódicos. Podem ser definidas como razões entre dois lados de um triângulo retângulo em função de um ângulo, ou, de forma mais geral, como razões de coordenadas de pontos no círculo unitário. Na análise matemática, estas funções recebem definições ainda mais gerais, na forma de séries infinitas ou como soluções para certas equações diferenciais. Neste último caso, as funções trigonométricas estão definidas não só para ângulos reais, como também para ângulos complexos.

No plano-xy (*Figura* (2.40)) consideremos a circunferência unitária de centro a origem de coordenadas, ela tem por equação $x^2 + y^2 = 1$.

Figura 2.40:

Seja $A(1,\ 0)$ o ponto da circunferência fixado na origem dos arcos orientados AT sobre a circunferência. Esta orientação é a usual: no sentido anti-horário, é positiva e no sentido horário, é negativa.

Estabelecemos uma correspondência entre os números reais e os pontos da circunferência do modo seguinte:

Ao número real t corresponde o ponto T da circunferência, de modo que o arco orientado $\widehat{AT}$ mede $|\ t\ |$ radianos. O arco tem orientação positiva se t é positivo; e orientação negativa se t é negativo.

Se $T(x,\ y)$ é o ponto que corresponde a seu número real t, a abscissa x chama-se de: *cosseno de* t e se denota $(\cos t)$ e a ordenada y denomina-se *seno de* t e denota-se $\text{sen}t$ e o ponto T escreve-se $x = \cos t,\ y = \text{sen}t$ ou $T(\cos x,\ \text{sen}t)$.

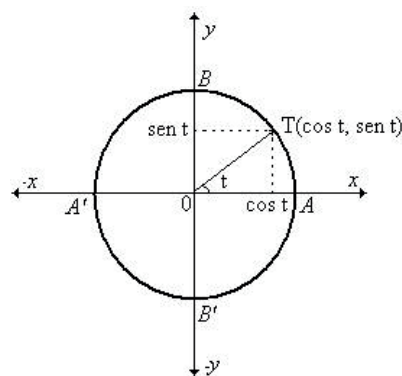
Por exemplo, considerando o comprimento da circunferência 2π, (logo, seu raio é 1), ao número $\dfrac{\pi}{2}$ corresponde o ponto $B(0,\ 1)$; logo $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ e $\text{sen}\dfrac{\pi}{2} = 1$.

De modo análogo, aos números π e 3π corresponde o ponto $A'(-1,\ 0)$, então $\cos\pi = \cos 3\pi = -1$ e $\text{sen}\pi = \text{sen}3\pi = 0$.

Desta correspondência podemos deduzir as propriedades, tais como:

Propriedade 2.5.

1) Como $T(\cos t,\ \text{sen}t)$ é um ponto da circunferência, e temos a relação fundamental: $\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$.

2) Considerando que T varia sobre a circunferência, sua abscissa e sua ordenada varia entre -1 e 1 isto é $-1 \leq \cos t \leq 1$ e $-1 \leq \text{sen}t \leq 1$.

3) *Periodicidade do seno e cosseno*: Se ao número real t corresponde o ponto T da circunferência e considerando $2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$, representa o número de k voltas ao redor da circunferência, ao número real $t + 2k\pi$ corresponde o mesmo ponto T, logo $\text{sen}t = \text{sen}(t + 2k\pi)$ e $\cos t = \cos(t + 2k\pi)$.

O menor número real $p > 0$ para o qual $\text{sen}t = \text{sen}(t + p)$ e $\cos t = \cos(t + p)$, denominamos período do seno e cosseno.

4) Aos números reais t e $-t$ corresponde os pontos T e T' respectivamente, são simétricos respeito do eixo-x e estes pontos tem a mesma abscissa porém suas ordenadas só diferem no sinal; isto é $\cos(-t) = \cos t$ e $\text{sen}(-t) = -\text{sen}t$.

5) As propriedades (*identidades*) que estamos deduzindo apresentaremos ao leitor por sua utilidade.

1. $\text{sen}.a - \text{sen}.b = 2\cos\left[\frac{a+b}{2}\right]\text{sen}\left[\frac{a-b}{2}\right]$

2. $\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}a\cos b \pm \text{sen}b\cos a$

3. $\cos a + \cos b = 2\cos\left[\frac{a+b}{2}\right]\cos\left[\frac{a-b}{2}\right]$

4. $\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \text{sen}b\cos a$

5. $\cos a - \cos b = -2\text{sen}\left[\frac{a+b}{2}\right]\text{sen}\left[\frac{a-b}{2}\right]$

6. $\text{sen}a + \text{sen}b = 2\text{sen}\left[\frac{a+b}{2}\right]\cos\left[\frac{a-b}{2}\right]$

7. $\text{sen}a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)]$

8. $\text{sen}^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$

9. $\text{sen}a \cdot \text{sen}b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

10. $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$

11. $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

Do fato que, a cada número real x, podemos relacionar com o seno e cosseno, isto é existem $\text{sen}x$ e $\cos x$ para $x \in \mathbb{R}$ define-se:

- $\tan x = \dfrac{\text{sen}x}{\cos x}$ se, $\cos x \neq 0$ isto é $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$
- $\cot x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}x}$ se, $\text{sen}x \neq 0$ isto é $x \neq k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

- $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ se, $\cos x \neq 0$ isto é $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$
- $\csc x = \dfrac{1}{\text{sen}x}$ se, $\text{sen}x \neq 0$ isto é $x \neq k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

Para os valores de x, para os quais existam $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ e $\csc x$ verificam-se as seguintes propriedades:

1. $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$ **2.** $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$

3. $|\sec x| \geq 1$ **4.** $|\csc x| \geq 1$

2.7.3.1 Função seno

A função seno $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por: $f(x) = \text{sen}x$, isto é associa a cada número real x o número $y = \text{sen}x$.

Algumas características da função seno:

a) $D(f) = \mathbb{R}$ $\text{Im}(f) = [-1,\ 1]$

b) A função seno é periódica, seu período é 2π.

c) $\text{sen}(-x) = -\text{sen}x$. isto é, a função seno é ímpar e seu gráfico é simétrico respeito da origem e mostra-se na *Figura* (2.41).

d) $f(x) = \text{sen}x$ é positiva no 1^o e 2^o quadrantes (ordenada positiva). $f(x) = \text{sen}x$ é negativa no 3^o e 4^o quadrantes (ordenada negativa).

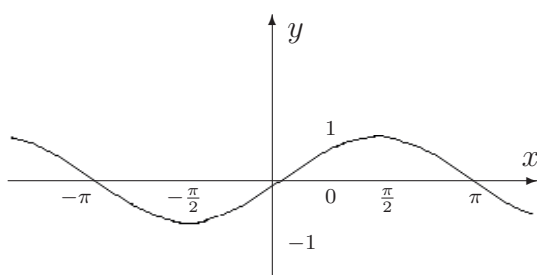



Figura 2.41: Seno

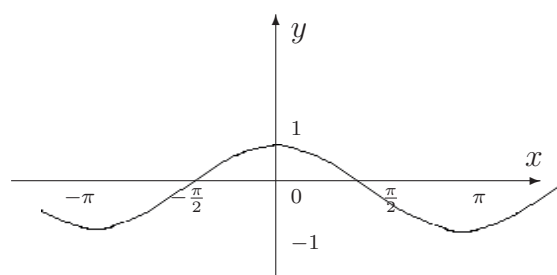



Figura 2.42: Cosseno.

2.7.3.2 Função cosseno

A função cosseno $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por: $f(x) = \cos x$

Algumas características da função cosseno:

a) $D(f) = \mathbb{R}$ $\text{Im}(f) = [-1,\ 1]$

b) $\cos(-x) = \cos x$, isto é, a função cosseno é par e seu gráfico é simétrico respeito ao eixo-y e mostra-se na *Figura* (2.42).

c) A função cosseno é periódica, seu período é 2π.

d) $f(x) = \cos x$ é positiva no 1^o e 4^o quadrante (abscissa positiva). $f(x) = \cos x$ é negativa no 2^o e 3^o quadrante (abscissa negativa).

Algumas características da função seno e cosseno:

Desde que $\text{sen}(\dfrac{\pi}{2} + x) = \cos x$, o gráfico de $y = \text{sen}x$ transforma-se no gráfico de $y = \cos x$ se a origem se desloca ao ponto $(\dfrac{\pi}{2}, 0)$.

Função	Valor 0 (zero) em:	Valor 1 (um) em:	Valor -1 em:
$\text{sen}x$	π	$\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$	$\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$
$\cos x$	$\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$	2π	$(2k+1)\pi$

2.7.3.3 Função tangente

A função real $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chamada "função tangente"é definida por:

$$f(x) = \tan x = \frac{\text{sen}x}{\cos x}$$

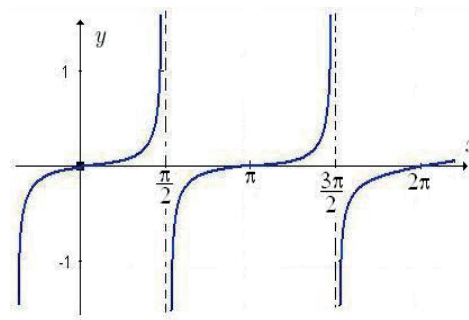
As características importantes da função tangente são as seguintes:

a) $D(f) = \mathbb{R} - \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}, \quad Im(f) = \mathbb{R}$

b) A função tangente é periódica, seu período é π.

c) $\tan(-x) = -\tan x$ isto é, a função tangente é ímpar e seu gráfico é simétrico respeito da origem como se mostra na *Figura* (2.43).

Figura 2.43: Tangente.

d) $f(x) = \tan x$ é positiva no 1^o e 3^o quadrantes (produto da ordenada pela abscissa positiva). $f(x) = \tan x$ é negativa no 2^o e 4^o quadrantes (produto da ordenada pela abscissa negativa).

Exemplo 2.91.

Dadas as funções $f(x) = \text{sen}x$ *e* $g(x) = \sqrt{1 - 9x^2}$, *determine* $f \circ g$ *e* $g \circ f$ *e seus respectivos domínios de definição.*

Solução.

1^o Temos $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \text{sen}g(x) = \text{sen}\sqrt{1-9x^2}$. Do fato ser todo o conjunto de números reais o domínio da função seno, temos $D(f\circ g) = \{\, x \in \mathbb{R}\, /.\, 1-9x^2 \geq 0\,\}$; isto é

$$D(f\circ g) = \{\, x \in \mathbb{R}\,/.\, -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}\,\} \quad \text{e} \quad (fog)(x) = \text{sen}\sqrt{1-9x^2}$$

2^o Temos $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{1-9[f(x)]^2} = \sqrt{1-9\text{sen}^2 x}$, logo temos $1-9x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq \text{sen}x \leq \frac{1}{3}$ assim temos que

$$D(g\circ f) = \{\, x \in \mathbb{R}\,/.\, -\frac{1}{3} \leq \text{sen}x \leq \frac{1}{3}\,\} \quad \text{e} \quad (g\circ f)(x) = \sqrt{1-9\text{sen}^2 x}$$

Exemplo 2.92.

Dadas as funções $f(x) = \tan x$ *e* $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ *determine* $f\circ g$ *e* $g\circ f$ *e seus respectivos domínios de definição.*

Solução.

Sabemos que o domínio $D(f) = \mathbb{R} - \{\, \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\,\}$ e $D(g) = [-1,\ 1]$

1^o Temos $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \tan g(x) = \tan\sqrt{1-x^2}$. Logo $(f\circ g)(x) = \tan\sqrt{1-x^2}$; para o cálculo do domínio:

$D(f\circ g) = \{\, x \in D(g)\,/.\, \sqrt{1-x^2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\,\}$; isto é $D(f\circ g) = [-1,\ 1]$.

2^o Temos que $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{1-[f(x)]^2} = \sqrt{1-\tan^2 x}$, então $(g\circ f)(x) = \sqrt{1-\tan^2 x}$; logo $1-x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \tan x \leq 1$.

Assim temos que: $D(g\circ f) = \{\, x \in D(g)\,/.\, -1 \leq \tan x \leq 1\,\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [k\pi - \frac{\pi}{4},\ k\pi + \frac{\pi}{4}]$

2.7.3.4 Função cotangente

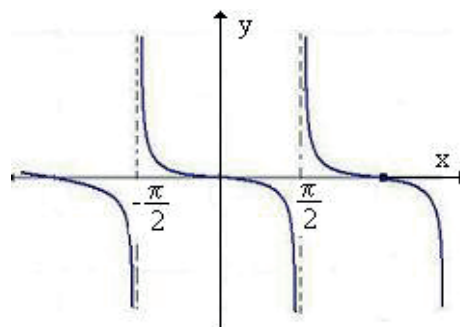
A "função cotangente" é definida por: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que: $f(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}x}$

Algumas características da função cotangente:

a) $D(f) = \mathbb{R} - \{\, k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\,\}$; $\quad \text{Im}(f) = \mathbb{R}$

b) $\cot(-x) = -\cot x$, isto é, a função cotangente é ímpar e seu gráfico é simétrico respeito da origem como se mostra na *Figura* (2.44).

Figura 2.44: Cotangente

c) A cotangente é função periódica, seu período é π.

2.7.3.5 Função secante

É a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\csc x}$

Algumas características da função secante:

a) $D(f) = \mathbb{R} - \{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \}$; $\quad Im(f) = (-\infty, \ -1] \cup [1, \ +\infty)$.

b) A função secante é periódica, seu período é 2π.

c) $\sec(-x) = \sec x$ isto é, a função secante é par e seu gráfico é simétrico respeito ao eixo-y como se mostra na *Figura* (2.45).

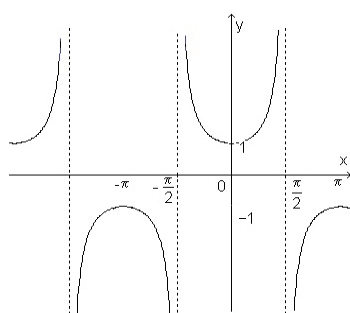



Figura 2.45: Secante

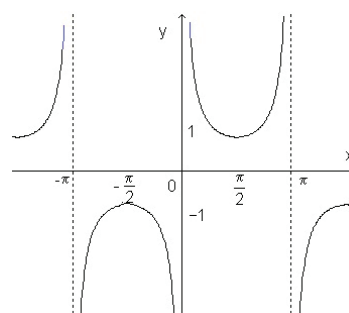



Figura 2.46: Cossecante

2.7.3.6 Função cossecante

É a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \csc x = \dfrac{1}{\sec x}$.

Algumas características da função cossecante:

a) $D(f) = \mathbb{R} - \{ \pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \}$; $\quad Im(f) = (-\infty, \ -1] \cup [1, \ +\infty)$.

b) A função cossecante é periódica, seu período é 2π.

c) $\csc(-x) = -\csc x$. isto é, a função cossecante é ímpar e seu gráfico é simétrico respeito ao eixo-y como se mostra na *Figura* (2.46).

Exemplo 2.93.

Determine a área do paralelogramo da base a, lado b, altura h e ângulo da base α.

Solução.

Considere o paralelogramo da *Figura* (2.47).

Da definição da função seno temos sen$a = \dfrac{h}{b}$, onde h é a altura do paralelogramo; logo, como a área é: $A = (base)(altura)$.

Logo, $A = (a)(h) \quad \Rightarrow \quad A = (a)(b \cdot \text{sen}\alpha)$.

Portanto a área do trapézio é $A = ab \cdot \text{sen}\alpha$. □

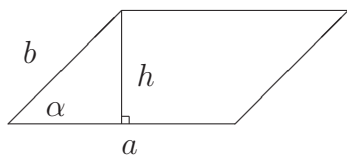
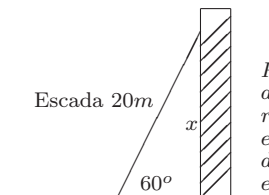



Figura 2.47:

Figura 2.48:

Exemplo 2.94.

Uma escada está encostada em uma parede formando um ângulo de 60^o *com o chão. Se a escada tem* 20 *metros de comprimento, que altura da parede ela atinge?*

Solução.

A partir do desenho da *Figura* (2.48), temos que $\text{sen}60^o = \dfrac{x}{20}$; assim, como o $\text{sen}60^o$ é conhecido temos: $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x}{20} \quad \Rightarrow \quad 2x = 20\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x = 10\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x = 17,32m.$

Portanto, a escada atinge $17,32\,m$ de altura da parede. □

Exemplo 2.95.

Determine duas funções f *e* g *tais que* $h(x) = \text{sen}^4 4x + 5\text{sen}^2 4x + 2$ *onde* $h = gof$.

Solução.

$h(x) = \text{sen}^4 4x + 5\text{sen}^2 4x + 2 = [\text{sen}4x]^4 + 5[\text{sen}4x]^2 + 2.$

Considere $f(x) = \text{sen}4x$ *e* $g(x) = x^4 + 5x^2 + 2.$

Outras relações trigonométricas

Em trigonometria, a lei dos senos é uma relação matemática de proporção sobre a medida de triângulos arbitrários em um plano.

Lei dos senos: Em um triângulo ABC qualquer, inscrito em uma circunferência de raio r, de lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ (Figura (2.49)) que medem respectivamente a, b e c e com ângulos internos, e vale a seguinte relação:

$$\frac{a}{\text{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\widehat{C}} = 2r$$

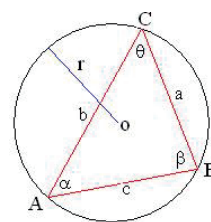
Lei dos cossenos: Em um triângulo ABC qualquer, de lados opostos aos ângulos internos e com medidas respectivamente a, b e c, como indica a Figura (2.49), valem as relações:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$$

Lei das tangentes: Em trigonometria, a lei das tangentes estabelece a relação entre as tangentes de dois ângulos de um triângulo e os comprimentos de seus lados opostos.Tal proposição foi descoberta por volta de 1580, pelo matemático François Viète.

Figura 2.49:

Sejam a, b e c os comprimentos dos três lados do triângulo e $\alpha,\ \beta$ e θ, os respectivos ângulos opostos a estes três lados. A lei das tangentes estabelece que

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{\tan\frac{1}{2}(\widehat{A}-\widehat{B})}{\tan\frac{1}{2}(\widehat{A}+\widehat{B})}$$

2.7.4 Funções trigonométricas inversas

Destacamos que as funções trigonométricas são periódicas, portanto não são injetivas; não obstante, restringindo convenientemente o domínio de cada uma delas, podemos obter que sejam injetivas. Nessa restrição, a função trigonométrica admite função inversa. Estas restrições são chamadas de "*restrição principal*".

2.7.4.1 Função arcsen

Considerando a restrição da função seno ao intervalo $[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$ teríamos que ela é bijetiva, entretanto, em geral ela não o é em todo seu domínio. Assim,

$$\text{sen} : [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,\ 1]$$

é bijetiva. Portanto, admite função inversa (*Figura* (2.50)) que é a função :

$$\text{arcsen} : [-1,\ 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$$

de modo que: $\quad x = \text{arcsen} y \quad \Leftrightarrow \quad y = \text{sen} x$

2.7.4.2 Função arccos

Em geral a função cosseno não é bijetiva em todo seu domínio.

Se consideramos a restrição da função cosseno ao intervalo $[0,\ \pi]$; então teríamos que ela é bijetiva.

Assim, $\cos : [0,\ \pi] \longrightarrow [-1,\ 1]$ é função bijetiva.

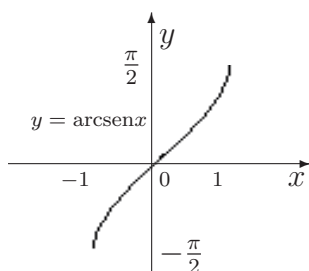



Figura 2.50: Arco seno.

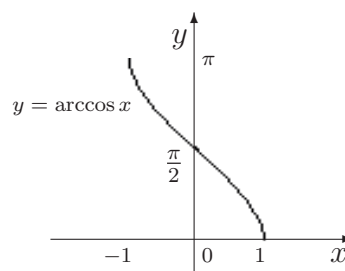



Figura 2.51: Arco cosseno.

Portanto, admite função inversa (*Figura* (2.51)) que é a função :

$$\text{arccos} : [-1,\ 1] \longrightarrow [0,\ \pi]$$

de modo que:

$$x = \arccos y \quad \Rightarrow \quad y = \cos x$$

2.7.4.3 Função arctan

Chama-se restrição principal da tangente à função; $\quad \tan : [-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva; logo ela admite função inversa (*Figura* (2.52)) é a função:

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$$

de modo que $x = \arctan y \quad \Leftrightarrow \quad y = \tan x$.

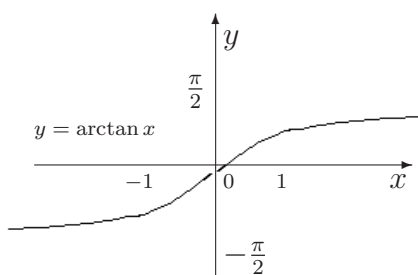



Figura 2.52: Arco tangente

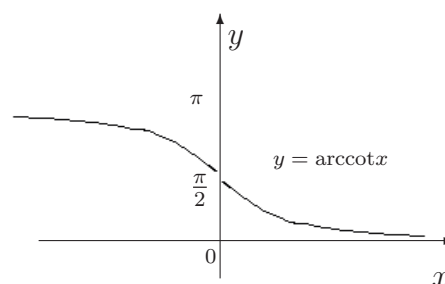



Figura 2.53: Arco cotangente

2.7.4.4 Função arcctg

Chama-se restrição principal da cotangente à função;

$$\cot : [0,\ \pi] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

ela é bijetiva; logo ela admite como função inversa (*Figura* (2.53)) a função:

$$\text{arccot} : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\ \pi]$$

de modo que $\quad x = \text{arccot} y \Leftrightarrow y = \cot x.$

2.7.4.5 Função arcsec

Chama-se restrição principal da secante à função:

$$\sec : [0,\ \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \longrightarrow (-\infty,\ -1] \cup [1,\ +\infty)$$

esta função é bijetiva; logo ela admite função inversa.

Sua função inversa é:

$$\text{arcsec} : (-\infty,\ -1] \cup [1,\ +\infty) \longrightarrow [0,\ \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2},\ \pi]$$

de modo que $x = \text{arcsec} y \Leftrightarrow y = \sec x$ (*Figura* (2.54))

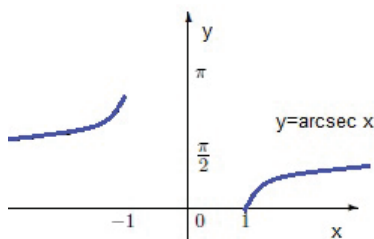



Figura 2.54: Arco secante

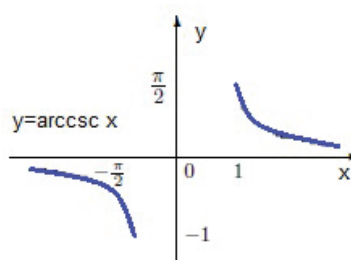



Figura 2.55: Arco cossecante.

2.7.4.6 Função arccsc

Chama-se restrição principal da cossecante à função;

$$\csc : [-\frac{\pi}{2},\ 0) \cup (0,\ \frac{\pi}{2}] \longrightarrow (-\infty,\ -1] \cup [1,\ +\infty)$$

ela é bijetiva; e admite função inversa (Figura (2.55)) é a função:

$$\text{arccsc} : (-\infty,\ -1] \cup [1,\ +\infty) \longrightarrow [-\frac{\pi}{2},\ 0) \cup (0,\ \frac{\pi}{2}]$$

de modo que: $\quad x = \text{arccsc} y \quad \Rightarrow \quad y = \csc x.$

Exemplo 2.96.

Mostre que $\quad \cos(\text{arcsen} x) = \pm\sqrt{1 - x^2}.$

Solução.

Sabemos que a função sen$x$ e arcsen$x$ uma é função inversa da outra; logo sen(arcsen$x$) $=$ x.

Por outro lado, da identidade trigonométrica $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ segue por questão de notação que $[\text{sen}x]^2 + [\cos x]^2 = 1$, logo sendo o domínio da função seno e cosseno quaisquer número real vem, que $[\text{sen}(\text{arcsen}x)]^2 + [\cos .(\text{arcsen}x)]^2 = 1$ isto é $x^2 + [\cos(\text{arcsen}x)]^2 = 1$ então $\cos(\text{arcsen}x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

2.7.5 Funções hiperbólicas

Considerando diferentes triângulos retângulos como na *Figura* (2.56) e calculando a relação entre seus lados, obteremos que estas relações são independentes do comprimento de seus lados. Assim, sabemos que:

$$\text{sen}\alpha = \frac{BC}{OC}, \quad \cos\alpha = \frac{OB}{OC}, \quad \tan\alpha = \frac{BC}{OB}$$

E, suas correspondentes relações inversas são:

$$\csc\alpha = \frac{OC}{BC}, \quad \sec\alpha = \frac{OC}{OB}, \quad \cot\alpha = \frac{OB}{BC}$$

respectivamente.

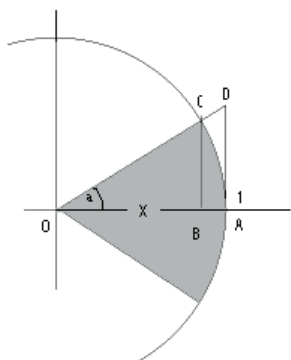



Figura 2.56:

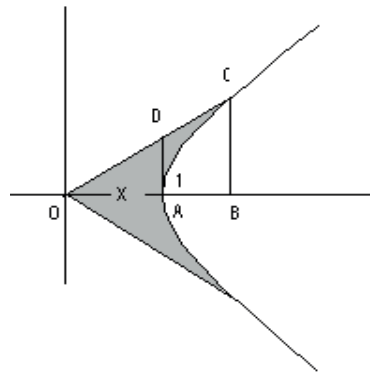



Figura 2.57:

A área do círculo de centro 0 e raio $\overline{OA} = r$ é igual a $2\pi r^2$, logo a área de um setor circular de ângulo 2α é αr^2. Considerando $r = 1$, a área do setor circular de ângulo 2α é α.

Chamamos x a área do setor circular de ângulo 2α, então $\text{sen}x = \overline{BC}$, $\cos x = \overline{OB}$ e $\tan x = BC/OB$; resulta que a equação da circunferência de raio um e centro a origem de coordenadas é $x^2 + y^2 = 1$, e a equação de uma hipérbole equilátera de raio um e centro a origem de coordenadas é $x^2 - y^2 = 1$.

Podemos definir na *Figura* (2.57), as seguintes relações:

- Seno hiperbólico: $\text{senh}\alpha = \dfrac{BC}{OA}$
- Cosseno hiperbólico: $\cosh\alpha = \dfrac{OB}{OA}$
- Tangente hiperbólico: $\tanh\alpha = \dfrac{BC}{OB}$
- Cotangente hiperbólico: $\coth\alpha = \dfrac{OB}{BC}$
- Secante hiperbólico: $\text{sech}\alpha = \dfrac{OA}{OB}$
- Cossecante hiperbólico: $\text{csch}\alpha = \dfrac{OA}{BC}$

Observe que as relações $\coth\alpha$, $\text{sech}\alpha$ e $\text{csch}\alpha$ são inversas das relações $\tanh\alpha$, $\cosh\alpha$ e $\text{senh}\alpha$ respectivamente.

Do mesmo modo, para o caso das funções trigonométricas habituais, a área sombreada da hipérbole que corresponde a um ângulo 2α, considerando $\overline{OA} = 1$, é α.

Seja x a área do setor circular de ângulo 2α, então: $\text{senh}x = BC$, $\cosh x = OB$ e $\tanh x = AD$.

Em algumas ocasiões as combinações de e^x e e^{-x} aparecem com frequência; em tais ocasiões acostuma-se a escrever o modelo matemático correspondente utilizando as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chamadas hiperbólicas, e definidas a seguir:

- Seno hiperbólico: $f(x) = \text{senh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
- Cosseno hiperbólico: $f(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
- Tangente hiperbólico: $f(x) = \tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{\text{senh}x}{\cosh x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
- Cotangente hiperbólico: $f(x) = \coth x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{\cosh x}{\text{senh}x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$
- Secante hiperbólico: $f(x) = \text{sech}x = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
- Cossecante hiperbólico: $f(x) = \text{csch}x = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Exercícios 2-7

1. Verifique se a função a seguir é par o ímpar justificando sua resposta.

1. $f(x) = -x^3 + x$	**2**. $f(x) = x \cdot \text{sen}x$	**3**. $f(x) = \text{sen}3x \cdot \cos x$
4. $f(x) = 5x - \text{sen}x^2$	**5**. $h(x) = \dfrac{x}{\mid x \mid}$	**6**. $f(x) = x \cdot e^{t^2}$
7. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	**8**. $g(x) = 5$	**9**. $f(x) = x^4 + \cos^3 x$

2. Determine duas funções f e g tais que $h = gof$ nos seguintes casos:

1. $h(x) = (x^2 + 3)^6$	**2**. $h(x) = 3(x + \mid x \mid)$	**3**. $h(x) = 2^{\text{sen}2x}$
4. $h(x) = \left(\dfrac{x-4}{\sqrt{x-2}}\right)^2$	**5**. $h(x) = \cos^2 5x + 7\cos^6 5x$	**6**. $h(x) = (x^2 - 8)^4$
7. $h(x) = \left(\dfrac{2x+5}{x-4}\right)^3$	**8**. $h(x) = (\cos 4x)^2 - 4(\cos 4x)$	**9**. $h(x) = 2^{\tan 2x}$

3. Se $f \ : A \longrightarrow \text{Im}(f)$ é monotônica estrita, então $f^{-1} : \text{Im}(f) \longrightarrow A$ é monotônica estrita do mesmo tipo?

4. Prove que $\tan x$ é estritamente crescente em $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

5. Dado o gráfico da função $f(x)$ (Figura 2.58) e os valores a e b da variável independente x. Determine $f(a)$ e $f\ (b)$ no desenho. Qual é a interpretação geométrica da relação:

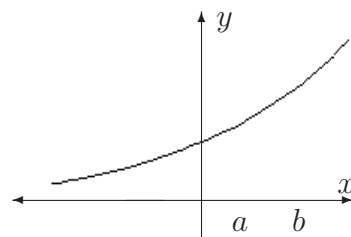



Figura 2.58

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

6. Prove que a função sen $: \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ é estritamente crescente.

7. Seja $f(x) = 2x^2 + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{5}{x} + 5x$. Mostre que $f(x) = f(\dfrac{1}{x})$.

8. Determine o domínio de definição das funções que se indicam:

   1. $y = 1 - \text{Ln}x$ **2.** $y = \text{Ln}(\text{sen}(2x - 1))$ **3.** $y = \arccos\left(\dfrac{1 - 2x}{4}\right)$

   4. $y = \text{Ln}\sqrt{x - 4}$ **5.** $y = \text{arcsen}(x - 2)$ **6.** $y = \text{Ln}(\text{Ln}(x - 1))$

9. A função $g(x)$ é definida por: $g(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}$ quando $x \leq \dfrac{11}{3}$ e $g(x) = 1 + x$ quando $x > \dfrac{11}{3}$. Achar todas as raízes reais da equação $[g(x)]^2 = 7x + 25$.

10. Achar o maior valor possível para n para o qual $2^x > x^n$ para todas as $x \geq 100, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

11. Determine se as seguintes desigualdades são verdadeiras:

    1. $\cosh^2 x + \text{senh}^2 x = \cosh 2x$ **2.** $\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1$

    3. $\cosh(x + y) = \cosh x. \cosh y + \text{senh}y.\text{senh}x$ **4.** $1 - \coth^2 x = \text{csch}^2 x$

    5. $\text{senh}(x + y) = \text{senh}x. \cosh y + \text{senh}y. \cosh x$ **6.** $1 - \tan^2 x = \text{sech}^2 x$

    7.. $2\text{senh}x. \cosh x = \text{senh}^2 x$

12. Seja $f(x) = \text{sen}x - \cos x$. Mostre que $f(1) > 0$.

13. Determine o período das seguintes funções:

    1. $y = 2\text{sen}(3x + 5)$ **2.** $y = 5 \cos 2x$

    3. $y = -\cos\left[\dfrac{x - 1}{2}\right]$ **4.** $y = \text{sen}\left[\dfrac{2t + 3}{6\pi}\right]$

14. Mostre que $y = \text{senh}x$ e $y = tanhx$ são funções ímpares, e $y = \cosh x$ é função par.

15. Resolver graficamente a equação:

    1. $x = 2\text{sen}x$ **2.** $x = \tan x$ **3.** $4\text{sen}x = 4 - x$

16. Um navio, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos A, B e C. Quando o navio está em A, o comandante observa o farol em F, e calcula o ângulo $\widehat{FAC} = 30^o$. Após navegar 4 milhas até B, verifica-se o ângulo $\widehat{FBC} = 75^o$. Quantas milhas separa o farol do ponto B?

17. Uma torre tem 20 metros de altura. Se puxarmos um cabo do topo ao chão (como mostra a Figura 2.59), qual será o comprimento aproximado (x) do cabo?

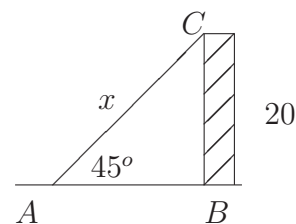



Figura 2.59

18. Pedro e Marcos que estão distantes $2,7\ km$ um do outro, observam um helicóptero quieto no ar, Pedro vê o helicóptero segundo um ângulo de 45^o e Marcos, ao mesmo tempo, vê o helicóptero segundo um ângulo de 60^o. Aproximadamente a que altura estava o helicóptero?

19. Um avião levanta vôo e sobe fazendo um ângulo de 15^o com a horizontal. A que altura estava e qual é a distância percorrida quando passa pela vertical por uma igreja situada a $2\ km$ do ponto de partida?

20. Verificar que, se $0 < \alpha < \pi$, então $\cot\dfrac{\alpha}{2} \geq 1 + \cot\alpha$

21. Seja $\alpha \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$. Determine o conjunto de todos os valores de α tais que todas as soluções da equação $x^4 - \sqrt[4]{48}x^2 + \tan\alpha = 0$ em x se encontrem em $\mathbb{R}$.

22. Se os arcos positivos $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ e α_4 se encontram entre 0 e π, mostre que

    1. $\text{sen}\alpha_1 + \text{sen}\alpha_2 \leq 2\cdot\text{sen}\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$

    2. $\text{sen}\alpha_1 + \text{sen}\alpha_2 + \text{sen}\alpha_3 + \text{sen}\alpha_4 \leq 4\cdot\text{sen}\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{4}$

23. Verificar que

    1. $\tan 20^o \cdot \tan 40^o \cdot \tan 50^o \cdot \tan 80^o = 3.$

    2. $\cos 20^o - \cos 80^o = -\cos 140^o$

24. Determine o máximo número de raízes da equação $E(x) = \log x - \text{sen}x = 0$.

25. Uma árvore, partida pelo vento, mantém seu tronco perpendicular ao solo, formando com ele um triângulo retângulo. Se a parte quebrada faz um ângulo de 60^o com o solo e se o topo da árvore está agora distanciado $10\ m$ de sua base, qual era aproximadamente a altura original da árvore?

26. Num triângulo $\triangle ABC$ onde $\overline{AB} = 10cm, \overline{AC} = 12cm$ e o ângulo $\widehat{A}$ é 30^o, determine a área desse triângulo.

27. Associando V para as sentenças verdadeiras e F para as falsas, assinale a alternativa que contém a sequência correta.

i) A função $y = \csc x \cdot \sec x$ é negativa no 2^o e no 4^o quadrante.

ii) Se sen$x = -\dfrac{5}{13}$, quando $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, então $\cos x = \dfrac{10}{13}$.

iii) O domínio da função $y = \cot x$ é $\{\, x \in \mathbb{R} \;/\; x \leq k\pi \,\}$.

iv) A função $y = \tan x$ é periódica, com período $P = \pi\, rad$.

28. Achar o intervalo de variação de x para que seja válida a identidade:

1. $\text{arcsen}x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$

2. $\arccos\sqrt{1-x^2} = \text{arcsen}x$

3. $\text{arcsen}\sqrt{x} + \arccos\sqrt{x} = \dfrac{\pi}{2}$

4. $\arccos\sqrt{1-x^2} = -\text{arcsen}x$

5. $\arccos\left[\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right] = 2\text{arccot}x$

6. $\arccos\left[\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right] = -2\arctan x$

7. $\arctan x + \arctan 1 = \arctan\left[\dfrac{1+x}{1-x}\right]$

8. $\arctan x = \text{arccot}\dfrac{1}{x} - \pi$

9. $\arctan x + \arctan 1 = \arctan\left[\dfrac{1+x}{1-x}\right] + \pi$

10. $\arctan x = \text{arccot}\dfrac{1}{x}$

29. Mostre que as seguintes fórmulas são verdadeiras:

1. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \dfrac{\cos 2x \cdot \text{sen}(\frac{3x}{2})}{sen(\frac{x}{2})}$

2. $\cos x \cdot \cos(\dfrac{2\pi}{3} + x) + \cos(\dfrac{2\pi}{3} + x) \cdot \cos(\dfrac{2\pi}{3} - x) + \cos(\dfrac{2\pi}{3} - x)\cos x = -\dfrac{3}{4}$

3. $\text{sen}x + \text{sen}2x + \text{sen}7x + \text{sen}8x = 4\text{sen}(\dfrac{9x}{2}) \cdot \cos 3x \cdot \cos(\dfrac{x}{2})$

4. $\dfrac{\tan x + \tan 7x}{\tan 3x + \tan 5x} = \dfrac{\cos 3x \cdot \cos 5x}{\cos x \cdot \cos 7x}$

5. $\dfrac{\pi}{4} = \arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3}$

30. Expressar a área de um trapézio isósceles de bases a e b como função do ângulo β da base a. Construir o gráfico para $a = 1$ e $b = 3$.

31. Seja a uma constante real positiva. Resolver a equação em $\mathbb{R}$, sendo $0 < x < a$.

$$\sqrt{a}\sqrt{a + \sqrt{a^2 - x^2}} + \sqrt{3a}\sqrt{a - \sqrt{a^2 - x^2}} = 2\sqrt{2}x$$

Sugestão: Considerar $a \cdot \text{sen}\beta = x$

Miscelânea 2-1

1. Dada a função $f(x) = \dfrac{9-x^2}{4-x^2}$ para $x \geq 0, \quad x \neq 2$:

   1. Mostre que f é injetiva **2.** Determine f^{-1}

   3. Determine $\text{D}(f^{-1})$ **4.** Determine $\text{Im}(f^{-1})$

2. Resolver graficamente a equação: $2^x - 2x = 0$.

3. Determine funções f tais que $f(x^2) - f(y^2) + 2x + 1 = f(x+y) \cdot f(x-y)$ quaisqer que sejam os números reais $x, \ y$.

4. Dada a relação: $R(x) = 2x^3 - 5x^2 - 23x$, determine todas as raízes da igualdade $R(x) = R(-2)$.

5. Determine todas as raízes da equação $f(x) = f(5)$ sabendo que a relação $f(x) = x^2 - 12x + 3$ é definida no intervalo $[-5, \ 5]$.

6. Seja $f(n)$ a soma dos n primeiros elementos de uma progressão aritmética. Mostre que;
$$f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = 0$$

7. Esboçar o gráfico dos pontos que cumprem cada uma das seguintes relações:

   1. $S = \{ \ (x, \ y) \in \mathbb{R}^2 \ /. \ y \leq 2x, \quad y \geq 2^{-x} \ \}$

   2. $S = \{ \ (x, \ y) \in \mathbb{R}^2 \ /. \ y \leq 2^{-x}, \quad y + x \geq 0, \quad x^2 + y^2 < 4 \ \}$

   3. $S = \{ \ (x, \ y) \in \mathbb{R}^2 \ /. \ y \leq 3x, \quad y + x < 0, \quad y \leq 2^{-x} \ \}$

   4. $S = \{ \ (x, \ y) \in \mathbb{R}^2 \ /. \ y \leq \log_4 x, \quad x^2 + y^2 \leq 9, \quad x > 0 \ \}$

   5. $S = \{ \ (x, \ y) \in \mathbb{R}^2 \ /. \ y \leq \log_{0.6} x, \quad x^2 + y^2 < 16, \quad x > 0 \ \}$

   6. $S = \{ \ (x, \ y) \in \mathbb{R}^2 \ /. \ x \leq \log_3 y, \quad x^2 + y^2 < 9, \quad y > 0 \ \}$

   7. $S = \{ \ (x, \ y) \in \mathbb{R}^2 \ /. \ x \leq 2y, \quad y - x \geq 0, \quad x^2 + y^2 < 16 \ \}$

8. Diga quais das funções são periódicas. Nos casos afirmativos, determine quando

existem os períodos.

1. $f(x) = x + [|x|]$ **2**. $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Z}$

3. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se}, \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se}, \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ **4**. $f(x) = \begin{cases} \text{sen}x, & \text{se}, \quad x \geq \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x, & \text{se}, \quad x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

5. $f(x) = \cos\dfrac{x}{3} + \cos\dfrac{x}{4}$ **6**. $f(t) = \cos(10t) + \cos[(10+\pi)t]$

9. Os lados de um triângulo medem 1 cm e 2 cm respectivamente. Construir o gráfico da área do triângulo como função do ângulo x compreendido entre tais lados.

10. Demonstrar as seguintes identidades:

1. $\text{Ln} \mid \csc x - \cot x \mid = -\text{Ln} \mid \csc x + \cot x \mid$

2. Se $f(x) = -\text{Ln} \mid \csc x + \cot x \mid$, então $e^{3\text{Ln}\sqrt[3]{f(x)}} = \text{Ln}\left|\dfrac{\text{sen}x}{1+\cos x}\right|$

11. Sejam as funções, $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Demonstrar:

1. $f(x) + f(y) = 2f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \cdot f\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ **2**. $\dfrac{g(2x)+g(2y)}{f(2x)+f(2y)} = \left(\dfrac{g}{f}\right)(x+y)$

3. $g(x) + g(y) = 2g\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \cdot f\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ **4**. $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$

5. $[f(x) + g(x)]^n = f(nx) + g(nx) \quad n \in \mathbb{N}$

6. $f(x)$ é função par e, $g(x)$ é função ímpar.

7. $\left[f(\dfrac{x}{2})\right]^2 = [g(x)]^2 + 1$ e $\left[g(\dfrac{x}{2})\right]^2 = [f(x)]^2 - 1$

12. Mostre que:

1. $\cos(\text{arcsen}x) = \sqrt{1-x^2}$ **2.** $\text{sen}(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

3. $\sec(\arctan x) = \sqrt{1+x^2}$ **4.** $\csc(\text{arccot}x) = \sqrt{1+x^2}$

13. Da relação $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\tan\alpha + m - 1}{\tan\alpha + m + 1}$, determine o valor de $\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

14. Se A e C representam respectivamente o maior e menor dos ângulos de um triângulo tais que seus lados formam uma progressão aritmética. Mostre que: $4(1-\cos A)(1-\cos C) = \cos A + \cos C$.

15. Demonstre que um triângulo cujos ângulos verifica a relação: $2\cos B\text{sen}C = \text{sen}A$ é isósceles.

16. Achar o domínio de definição das seguintes funções:

    1. $y = \sqrt{\text{Ln}(\text{sen}x)}$ **2.** $y = \text{Ln}(\text{sen}x)$

17. Verificar as seguintes fórmulas:

    1. $\dfrac{\pi}{4} = \arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{5} + \arctan\dfrac{1}{8}$ **2.** $2\arctan\dfrac{1}{2} = \arctan\dfrac{4}{3}$

    3. $\dfrac{\pi}{4} = 2\arctan\dfrac{1}{7} + \arctan\dfrac{1}{5} + 2\arctan\dfrac{1}{8}$ **4.** $\dfrac{\pi}{4} = 5\arctan\dfrac{1}{7} + 2\arctan\dfrac{3}{79}$

18. Mostre que o gráfico da função $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$ é simétrico respeito à origem de coordenadas. Determine sua função inversa.

19. Escrever em forma explícita uma função $y = f(x)$ dada em forma implícita mediante cada uma das equações:

    1. $x^2 + y^2 = 1$ **2**. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ **3**. $\text{Ln}(x) + \text{Ln}(y + 1) = 4$

    4. $x^3 + y^3 = a^3$ **5**. $2^{x+y}(x^2 - 2) = x^3 + 7$ **6**. $(1 + x)\cos y - x^2 = 0$

20. Seja $f(x) = a \cdot \cos(bx + c)$. Quais devem ser os valores das constantes a, b e c para obter a identidade $f(x + 1) - f(x) = \text{sen}x$?

21. Resolver a equação:

    1. $2\text{sen}x = \sqrt{1 - \text{sen}2x} - \sqrt{1 + \text{sen}2x}$ **2.** $2\cos x = \sqrt{1 - \text{sen}2x} - \sqrt{1 + \text{sen}2x}$

    3. $2\text{sen}x = \sqrt{1 + \text{sen}2x} + \sqrt{1 - \text{sen}2x}$

22. Num cone circular reto com raio na base R e altura H encontra-se inscrito um cilindro modo que os planos e os centros das bases circulares do cone e cilindro coincidem. Determine o raio do cilindro para que sua superfície total seja máxima, sabe-se que $H > 2R$.

23. Apresentar o número **x** como soma de dois números tais que a soma de seus quadrados seja a menor possível.

24. Com um lápis cuja ponta tem $0,02mm$ de espessura, deseja-se traçar o gráfico da função $f(x) = 2^x$. Até que distância à esquerda do eixo vertical pode-se ir sem que o gráfico atinja o eixo horizontal?

25. Um arame de comprimento **x** deve-se dividir em duas partes. Uma delas estará destinada para construir um quadrado, e a outra para um triângulo equilátero.

Qual é o comprimento de cada parte para que a soma das áreas das figuras obtidas seja a menor possível.

26. Um projeto de Lei para cobrança de impostos, sobre carros prevê que o proprietário de um carro pagará R$100, 00 mais 7% do valor estimado do carro. Outro projeto propõe que o proprietário pague R$400, 00 mais 2% do valor estimado do carro. Considere apenas os aspectos financeiros; que tipo do cobrança será mais favorável ao proprietário?

27. Um investidor aplicou uma quantia de dinheiro em ações financeiras com resgate ao término de 60 dias da aplicação. Nos primeiros 30 dias da aplicação soube que perdeu 6% do total investido, e ao término dos 60 dias recuperou 6% de aquilo que restou dos primeiros 30 dias da aplicação. Ao término dos 60 dias retirou todo seu dinheiro recebendo $R\$40.000,00$. Qual foi a quantia inicial aplicada pelo investidor?

28. Observações feitas durante longo tempo mostram que, apóos período de mesma duração, a população da terra fica multiplicada pelo mesmo fator. Sabendo que essa população era de $2,68$ bilhões em 1956 e $3,78$ bilhões em 1972, pede-se:

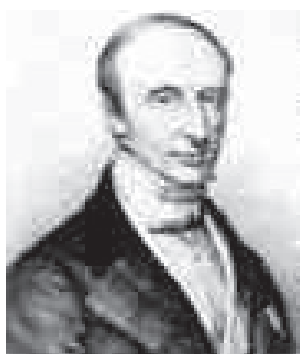
    1. O tempo necessário para que a população da terra dobre de valor.

    2. A população estimada para o ano 2012.

    3. Em que ano a população da terra era de 1 bilhão.

29. Para determinar a idade de uma rocha hoje a ciência foi capaz de desenvolver uma técnica baseada na concentração de material radioativo dentro dela. Para achar esta concentração radioativa mais nova na rocha usamos $C(t) = k.3^{-t}$ como a fórmula, onde $C(t)$ representa a concentração de material radioativo, t o tempo medido em centenas de anos e k a concentração do elemento no momento em que a rocha foi formada. Se $k = 4,500$ **1.** Quanto tempo deve ter passado para nós encontrar uma concentração de 1500? **2.** Qual seria o foco radioativo depois de dois séculos?

Capítulo 3

LIMITES

A. L. Cauchy

Augustín Louis Cauchy *nasceu no* 21 *de agosto de* 1789*, em Paris, França. Faleceu em* 23 *de maio de* 1857*, em Sceaux (próximo de Paris).*

Em 1802*, entrou na Escola Central do Panteão, onde passou dois anos estudando idiomas. Em* 1804*, ingressou na Escola Politécnica e graduou-se em* 1807*, para logo ingressar na Escola de Engenharia Civil. Augustín foi bastante religioso (católico) e isso ocasionou-lhe muitos problemas de relacionamento.*

O primeiro avanço na matemática moderna por ele produzido foi a introdução do rigor na análise matemática. O segundo foi no lado oposto - combinatorial. Partindo do ponto central do método de Lagrange, na teoria das equações, Cauchy tornou-a abstrata e começou a sistemática criação da teoria dos grupos.

Cauchy fez importantes contribuições à Análise, Teoria de grupos, convergência e divergência de Séries infinitas, Equações diferenciais, Determinantes, Teoria das probabilidades e a Física Matemática, em 1811*, mostrou que os ângulos de um polígono convexo são determinados por suas faces.*

Sua abordagem da teoria das equações diferenciais foi inovadora, demonstrando a existência de unicidade das soluções, quando definidas as condições de contorno. Exerceu grande influência sobre a física de então, ao ser o primeiro a formular as bases matemáticas das propriedades do éter, o fluido hipotético que serviria como meio de propagação da luz.

Graças a seu formalismo matemático, a análise infinitesimal adquire sólidas bases.

Teve serias diferenças pessoais, com Liouville, por causa de uma posição na Escola da França. Cauchy produziu 789 *artigos científicos.*

3.1 Vizinhança de um ponto

Seja $x \in \mathbb{R}$, um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é uma vizinhança de x se existe um intervalo aberto $(a,\ b)$ tal que $x \in (a,\ b) \subseteq A$. Por exemplo, os conjuntos $A = (-1,\ 2]$ e $B = (-1,\ 1)$ são vizinhanças do ponto $x = 0$, pois A e B são conjuntos que contêm intervalos abertos

contendo $x = 0$.

Para efeito de nosso estudo dos limites, qualquer intervalo aberto contendo um ponto a como seu ponto médio será uma vizinhança de a, isto justifica a seguinte definição:

Definição 3.1. *Vizinhança.*
Seja $a \in \mathbb{R}$, chamamos de vizinhança aberta ou bola aberta de centro a e raio $\delta > 0$, e denotamos $B(a, \delta)$, ao intervalo aberto $(a-\delta, a+\delta)$; isto é: $B(a, \delta) = (a-\delta, a+\delta)$.

Na *Figura* (3.1) observamos que o ponto a é o ponto médio do intervalo $(a - \delta,\ a + \delta)$.

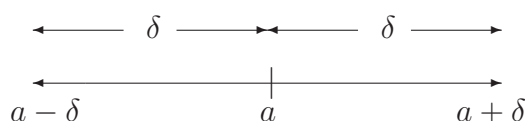



Figura 3.1:

Exemplo 3.1.

Para o número $a = 4$, suas vizinhança são:

$$(4 - \delta,\ 4 + \delta), \quad (4 - \frac{1}{3},\ 4 + \frac{1}{3}), \quad (4 - \frac{2}{5},\ 4 + \frac{2}{5}), \quad \cdots \quad etc$$

Propriedade 3.1.

i) $B(a,\ d) = \{\ x \in \mathbb{R}\ /.\ \mid x - a \mid < \delta\ \}$

ii) *A interseção de duas vizinhanças de a, é uma vizinhança de a.*

A demonstração é exercício para o leitor.

3.2 Limite de uma função

Um dos conceitos básicos e fundamentais do cálculo é o conceito de limite. Este conceito é tão importante para precisar outros, tais como continuidade, derivação, integração, etc. No seguinte exemplo teremos uma ideia de limite de uma função.

Exemplo 3.2.

Considere duas funções reais f e g de gráfico como mostra a Figura (3.2), assim definidas: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & se \quad x \neq 2 \\ 0 & se \quad x = 2 \end{cases}$ *e* $g(x) = 3 + x$ *para* $x \neq 2$.

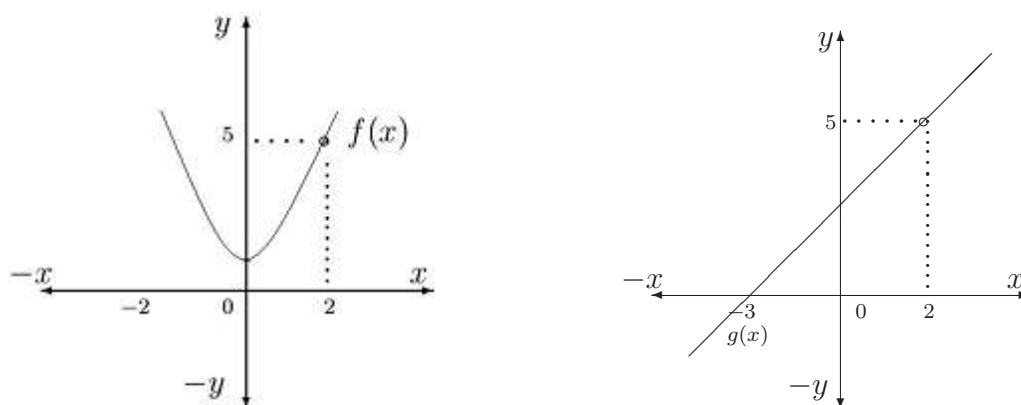



Figura 3.2:

Observe que $f(2) = 0$ entanto $g(2)$ não existe (não esta definido). O comportamento destas duas funções em uma vizinhança de 2, excluindo o ponto $x = 2$ é exatamente o mesmo e pode ser descrito assim:

> "*Para valores de x próximos ao ponto $a = 2$, com $x \neq 2$ os valores de $f(x)$ e $g(x)$ aproximam-se ao número $L = 5$*"

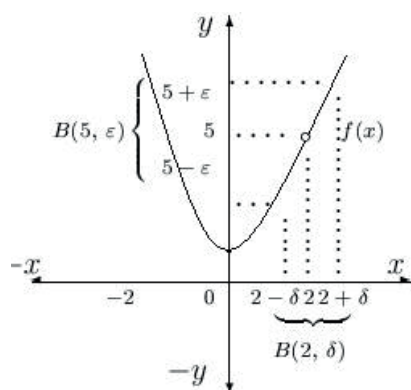
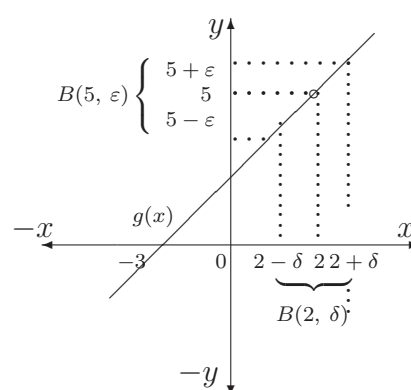



Figura 3.3: Figura 3.4:

Usando vizinhanças, esta descrição podemos expressar assim:

> "*Para toda vizinhança $B(5, \varepsilon)$ podemos determinar um $\delta > 0$, tal que para todo $x \neq 2$ e $x \in B(2, \delta)$, então $f(x) \in B(5, \varepsilon)$*" (*Figura* (3.3)).

Quando isto ocorre dizemos que 5 é o limite de $f(x)$ quando x tende (aproxima-se) para 2; a escrita em símbolos é: $\lim_{x \to 2} .f(x) = 5$.

Analogamente para a função $g(x)$, temos $\lim_{x \to 2} .g(x) = 5$ (*Figura* (3.4)).

Observe que o limite de $g(x)$ no ponto 2 não depende do valor de $g(2)$, que neste caso não existe, somente depende dos valores de g quando x esta próximo do ponto 2.

Definição 3.2.

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $x = a$ um ponto que não necessariamente pertença ao domínio $D(f)$, porém toda vizinhança de a contêm pontos do domínio $D(f)$; diz-se que o limite de $f(x)$ é L, quando x tende para a e escreve-se $\lim\limits_{x\to a} .f(x) = L$ quando:

- $\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0\,/. \quad \forall\, x \in D(f),\ x \neq a$ e $a - \delta < x < a + \delta$ então $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.

  Em termos de valor absoluto, esta definição é equivalente a:

- $\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta > 0/. \quad \forall x \in D(f), \quad 0 <\mid x - a \mid< \delta$ implica $\mid f(x) - L \mid< \varepsilon$.

No conceito de limite, aparece o seguinte problema:

Que tão perto do ponto $x = a$ deve ser o valor de x para que $f(x)$ diste do valor de L, um número suficientemente pequeno e fixado?

Exemplo 3.3.

Seja $f(x) = \left[\dfrac{x^5 - 1}{x^6 - 1}\right]$, completando a seguinte tabela, estime o valor do limite $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

x	$0,901$	$0,9001$	$0,90001$	$0,900001$	$1,01$	$1,001$	$1,0001$	$1,00001$
$f(x)$								

Solução.

x	$0,901$	$0,9001$	$0,90001$	$0,900001$
$f(x)$	$0,8735844779$	$0,87393816822$	$0,8739735220$	$0,8739770573$
x	$1,01$	$1,001$	$1,0001$	$1,00001$
$f(x)$	$0,8291600330$	$0,8329165975$	$0,8332916660$	$0,8333291667$

Exemplo 3.4.

Se $\lim\limits_{x\to 2}(4x + 3) = 11$. Que tão perto de 2 deve estar x para que $\mid f(x) - 11 \mid< 0.01$?

Solução.

Desejamos que: $\mid f(x) - 11 \mid< 0.01$ (note que $\varepsilon = 0.01$), porém

$$\mid f(x) - 11 \mid = \mid (4x + 3) - 11 \mid = 4 \mid x - 2 \mid< 0.01 \quad \Rightarrow \quad \mid x - 2 \mid< \frac{0,01}{4}$$

De esta última desigualdade temos que $\mid x - 2 \mid< 0,0025$ o que significa que x esta a uma distância de 2 em menos de $0,0025$ unidades.

Exemplo 3.5.

Calcular o seguinte limite: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-4x}{x^2-5x+6}$.

Solução.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-4x}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{2x(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{x-3}=-4$$

isto é possível pelo fato $x-2\neq 0$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-4x}{x^2-5x+6}=-4$.

Observação 3.1.

Para verificar o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ *mediante a Definição* (3.2), *inicialmente temos que escrever* $|f(x)-L|=|x-a|\cdot|g(x)|$, *logo devemos escolher um valor inicial* $\delta=\delta_1$ *para limitar* $|g(x)|$ *de tal modo que* $0<|x-a|<\delta$ *implique* $|g(x)|<M$ *com* $M\in\mathbb{R}$.

Assim, $0<|x-a|<\delta \quad\Rightarrow\quad |f(x)-L|=|x-a|\cdot|g(x)|<|x-a|\cdot M<\delta M=\varepsilon$.

O valor adequado para $\delta=\min.\{1,\ \dfrac{\varepsilon}{M}\}$.

Exemplo 3.6.

Verificar mediante a definição que $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+2x+4)=9$.

Solução.

A mostrar que é possível achar um $\delta>0$ de modo que $0<\mid x-1\mid<\delta$ implique $\mid(3x^2+2x+4)-9\mid<\varepsilon$ para qualquer número $\varepsilon>0$. Segue:

$$\mid(3x^2+2x+4)-9\mid=\mid 3x^2+2x-5\mid=\mid 3x+5\mid\cdot\mid x-1\mid<\delta\mid 3x+5\mid \tag{3.1}$$

Suponha exista um $\delta_1>0$ de modo que $\mid x-1\mid<\delta_1$ tentaremos limitar $\mid 3x+5\mid$; isto é buscaremos um número $M>0$ tal que $\mid 3x+5\mid<M$ sempre que $0<\mid x-1\mid<\delta_1$.

Com efeito, se $\mid x-1\mid<\delta_1$, então $-\delta_1<x-1<\delta_1$ logo $1-\delta_1<x<1+\delta_1$ então $3(1-\delta_1)+5<3x+5<3(1+\delta_1)+5$; por exemplo considere $\delta_1=1$ e teremos $5<3x+5<11$ assim

$$\mid 3x+5\mid<11 \tag{3.2}$$

De (3.1) e (3.2) temos que $\mid 3x+5\mid\cdot\mid x-1\mid<\delta\mid 3x+5\mid<11\delta=\varepsilon$ sempre que $\delta=\min.\{1,\ \dfrac{\varepsilon}{11}\}$.

Por tanto, para qualquer número $\varepsilon>0$, e considerando $\delta=\min.\{1,\ \dfrac{\varepsilon}{11}\}$ temos:

$$|(3x^2+2x+4)-9|<\varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0<|x-1|<\delta$$

Isto mostra que, o limite $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+2x+5)=9$ é verdadeiro.

Observação 3.2.

a) *Ao considerar um δ_1 particular, estamos considerando a vizinhança*

$$B(a,\ \delta_1) = (a - \delta_1,\ a + \delta_1) \quad ou \quad 0 < |x - a| < \delta_1$$

geralmente o δ_1 é um valor pequeno, pode-se considerar $|x - 1| < \delta_1 = 1$ porém este valor pode resultar inadequado em alguns casos pelo que devemos considerar outro número ainda menor.

b) *Considerar as seguintes propriedades de valor absoluto:*

i) *Se $|\ x - a\ | < \delta$ então $a - \delta < x < a + \delta$.*

ii) *Se $a < u < b$ então $|\ u\ | < \max.\{|\ a\ |,\ |\ b\ |\}$.*

Por exemplo, se $-4 < 3x - 9 < 2$ *então* $|3x - 9| < 4$ *pois* $|-4| = 4 = \max.\{\ |-4|,\ |\ 2\ |\ \}$.

iii) *Se $a < u < b$ então, $u^2 < k^2$ onde $k = \max.\{|\ a\ |,\ |\ b\ |\}$*

c) *Se $\delta > 0$ cumpre a definição de limite, qualquer outro δ_1 que cumpre a desigualdade $0 < \delta_1 < \delta$, também cumpre a definição.*

Exemplo 3.7.

Seja $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$, verificar mediante a definição que $\lim\limits_{x \to 4}.f(x) = 8$.

Solução.

Para todo $\varepsilon > 0$, deve-se mostrar que é possível achar um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - 8| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 4| < \delta$. O fato $0 < |x - 4|$, equivale a que $x \neq 4$.

$$|f(x) - 8| = \left|\frac{x^2 - 16}{x - 4} - 8\right| = \left|\frac{x^2 - 8x + 16}{x - 4}\right| = |x - 4| < \delta = \varepsilon$$

Logo, $\forall\, \varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon$ tal que $|f(x) - 8| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 4| < \delta$.

Exemplo 3.8.

Calcular o limite $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x - 3} - 1}{x - 4}$.

Solução.

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x - 3} - 1}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x - 3} - 1)(\sqrt{x - 3} + 1)}{(x - 4)(\sqrt{x - 3} + 1)} = \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x - 3} + 1)} =$$

considerando que x esta se aproximando a 4, podemos simplificar para obter

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x - 3} + 1} = 0,5$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x-3}-1}{x-4} = 0,5.$

Exemplo 3.9.

Dada a função $f(x) = \dfrac{2}{3(\sqrt{x}+1)}$ *demonstre que* $\lim\limits_{x\to 4} .f(x) = \dfrac{2}{9}$.

Solução.

Para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $\left|f(x) - \dfrac{2}{9}\right| = \left|\dfrac{2}{3(\sqrt{x}+1)} - \dfrac{2}{9}\right| = \left|\dfrac{2(2-\sqrt{x})}{9(\sqrt{x}+1)}\right| =$

$$= \left|\frac{2(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{9(\sqrt{x}+1)(2+\sqrt{x})}\right| < \frac{2}{9} \mid 4-x \mid \cdot \frac{1}{(\sqrt{x}+1)(2+\sqrt{x})} \tag{3.3}$$

Se $\mid x-4 \mid < \delta_1$, então $-\delta_1 < x-4 < \delta_1$ logo $4-\delta_1 < x < 4+\delta_1$.

Considerando $\delta_1 = 1$ temos $3 < x < 5$ então,

$$\sqrt{3}+1 < \sqrt{x}+1 < \sqrt{5}+1 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{3}+1) < (\sqrt{x}+1)$$

sabe-se que, para números x próximos de 4 vale a desigualdade $2 \leq (2+\sqrt{x})$, então

$$2(\sqrt{3}+1) \leq (\sqrt{x}+1)(2+\sqrt{x}) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(\sqrt{x}+1)(2+\sqrt{x})} \leq \frac{1}{2(\sqrt{3}+1)}$$

Observe, em (3.3) segue que

$$\mid f(x) - \frac{2}{9} \mid \leq \frac{2}{9} \mid 4-x \mid \frac{1}{(\sqrt{x}+1)(2+\sqrt{x})} \leq$$

$$\leq \frac{2}{9} \mid 4-x \mid \frac{1}{2(\sqrt{3}+1)} = \frac{\mid x-4 \mid}{9(\sqrt{3}+1)} < \frac{\delta}{\sqrt{3}+1} = \varepsilon$$

sempre que $\mid x-4 \mid < \delta \quad \forall\ \varepsilon > 0$.

Assim, considerando $\delta = \min.\{1,\ \varepsilon(\sqrt{3}+1)\}$ e $\mid x-4 \mid < \delta$, demonstramos que $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \dfrac{2}{9}$

Observação 3.3.

i) Calcular um limite é diferente de demonstrar o mesmo; para o *cálculo*, utilizamos propriedades de números reais, e de modo direto, tentamos chegar a um resultado; na *demonstração*, utilizamos a definição, logo devemos trabalhar com ε e δ.

ii) Suponha que estamos estudando o limite de uma função $f(x)$ numa vizinhança de $x = a$ e, $x = b$ seja o ponto mais próximo de $x = a$, onde a função $f(x)$ não está definida, então temos que considerar $\delta_1 \leq \dfrac{1}{2}|a-b|$.

Exemplo 3.10.

Calcular os limites: **i)** $\lim\limits_{x\to 4}\left[\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt{x}}{8-\dfrac{12}{x}}\right]$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 8}\left[\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}\right]$

Solução. **i)**

Observe, pelas propriedades do limite:

$$\lim_{x\to 4}\left[\frac{\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt{x}}{8-\frac{12}{x}}\right]=\left[\frac{\sqrt[3]{4^2}+3\sqrt{4}}{8-\frac{12}{4}}\right]=\left[\frac{\sqrt[3]{16}+6}{5}\right]$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 4}\left[\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt{x}}{8-\dfrac{12}{x}}\right]=\left[\dfrac{\sqrt[3]{16}+6}{5}\right]$.

Solução. **ii)**

Temos $(x-8)=[\sqrt[3]{x}-2][(\sqrt[3]{x})^2+2(\sqrt[3]{x})+2^2]$; logo, pelas propriedades do limite:

$$\lim_{x\to 8}\left[\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}\right]=\lim_{x\to 8}\left[\frac{[\sqrt[3]{x}-2][(\sqrt[3]{x})^2+2(\sqrt[3]{x})+2^2]}{\sqrt[3]{x}-2}\right]=\lim_{x\to 8}[(\sqrt[3]{x})^2+2(\sqrt[3]{x})+2^2]=12$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 8}\left[\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}\right]=12$.

Exemplo 3.11.

Seja $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ *definida por* $f(n+1)=f(n)+3$ *e* $f(1)=2$, *determine* $\lim\limits_{n\to 20}f(n)$.

Solução.

Temos $f(2)=f(1)+3$, $f(3)=f(2)+3=f(1)+2(3)$, $f(4)=f(3)+3=f(1)+3(3)$, em geral $f(n)=f(1)+3(n-1)=3n-1$, é uma progressão aritmética. Logo

$$\lim_{n\to 20}f(n)=\lim_{n\to 20}3n-1=59$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to 20}f(n)=59$.

Exemplo 3.12.

Seja $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ *definida por* $f(n+1)=2f(n)$ *e* $f(1)=3$, *determine* $\lim\limits_{n\to 20}f(n)$.

Solução.

Temos $f(2)=2f(1)$, $f(3)=2f(2)=2^2f(1)$, $f(4)=2f(3)=2^3f(1)$, em geral $f(n)=2^{n-1}f(1)$, é uma progressão geométrica. Logo

$$\lim_{n\to 20}f(n)=\lim_{n\to 20}2^{n-1}f(1)=\lim_{n\to 20}3\times 2^{n-1}=3\times 2^{19}$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to 20}f(n)=3\times 2^{19}$.

Exercícios 3-1

1. Estime o valor do limite $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^5-32}{x^6-64}$ completando a seguinte tabela:

x	$1,999$	$1,9999$	$1,99999$	$1,999999$	$2,01$	$2,001$	$2,0001$	$2,00001$
$f(x)$								

2. Calcular o $\lim\limits_{x\to 1}.g(x)$ para $g(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+15}-4}$ completando a seguinte tabela:

x	$0,999$	$0,9999$	$0,99999$	$0,999991$	$1,01$	$1,001$	$1,0001$	$1,00001$
$f(x)$								

3. Calcular o $\lim\limits_{x\to 3}g(x)$ para $g(x)=\dfrac{x-3}{x^2-9}$ completando a seguinte tabela:

x	$2,999$	$2,9999$	$2,99999$	$2,999999$	$3,01$	$3,001$	$3,0001$	$3,00001$
$f(x)$								

4. Calcular $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ para as seguintes funções:

   1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{se,} \quad x\neq 2\\ 5, & \text{se,} \quad x=2\end{cases}$ quando $a=2$

   2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+5}{x}, & \text{se,} \quad x>1\\ \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{se,} \quad x<1\end{cases}$ quando $a=1$

5. Demonstrar que: **1.** $\lim\limits_{x\to 4}\left|\dfrac{2(x-5)}{2x-7}\right|=2$ **2.** $\lim\dfrac{x^2}{3x-4}=-1$

6. Seja $y=x^2$. Quando x tende para 2; y tende para 4. Qual é o valor para δ em $0<\mid x-2\mid<\delta$; que, dê por resultado $\mid y-4\mid<\varepsilon=0,001$?

7. Seja $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. Para $x\to 2$ temos $y\to\dfrac{3}{5}$. Qual é o valor de δ para que $\mid x-2\mid<\delta$ dê por resultado $\mid y-\dfrac{3}{5}\mid<\varepsilon=0,1$?

8. Aplicando a definição, demonstrar os seguintes limites, achando um valor para um $\delta>0$, para o valor de ε dado.

   1. $\lim\limits_{x\to 3}(5x-3)=12 \quad \varepsilon=0,03$ **2.** $\lim\limits_{x\to 2}(3x+5)=11 \quad \varepsilon=0,0012$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x^2-4}{x-2}\right]=4 \quad \varepsilon=0,004$ **4**. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right]=\dfrac{1}{2} \quad \varepsilon=0,015$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{3x^2-2x-1}{x-1}\right]=4 \quad \varepsilon=0,015$ **6**. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\left[\dfrac{4x^2-1}{2x-1}\right]=2 \quad \varepsilon=0,07$

7. $\lim\limits_{x\to 3}(7x^2-20x+2)=5 \quad \varepsilon=0,001$ **8**. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x^2}{7x-13}\right]=4 \quad \varepsilon=0,001$

9. $\lim\limits_{x\to -3}\left[\dfrac{3x-1}{3x^2-25}\right]=-5 \quad \varepsilon=0,001$ **10**. $\lim\limits_{x\to -3}\left[\dfrac{x^2-14}{10x+29}\right]=5 \quad \varepsilon=0,1$

9. Aplicando a definição de limite, mostrar as seguintes igualdades:

1. $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-x)=10$ **2**. $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{\dfrac{4+x}{x^2-9}}=\dfrac{3}{4}$ **3**. $\lim\limits_{x\to -2}\left[\dfrac{2+x+x^2}{2x+5}\right]=4$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4}{x-2}=4$ **5**. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{3+2x}{5-x}=\dfrac{8}{9}$ **6**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x+2}{x^2-2x+1}=2$

7. $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{6-x}=1$ **8**. $\lim\limits_{x\to -2}(x^3+2)=-6$ **9**. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-11}}{3}=-\dfrac{2}{3}$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}=2$ **11**. $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+3}=1$ **12**. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}=2$

13. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{3x}{x+8}=-5$ **14**. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|\,x\,|}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}$ **15**. $\lim\limits_{x\to 4}\left[\dfrac{x^2-3x-4}{x-3}\right]=0$

16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|\,2-x\,|}{3x-1}=\dfrac{1}{2}$ **17**. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x+1}{9x-60}=\dfrac{8}{3}$ **18**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sqrt{2}}{2x+\sqrt{3}}=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

19. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{3x}{6x-5\pi}=3$ **20**. $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\dfrac{3x^2+1}{x^4+1}=\dfrac{7}{5}$ **21**. $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\dfrac{\|\,x\,\|+x}{3+x-x^2}=1$

22. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\left[\dfrac{\|\,x\,\|}{x+1}\right]=0$ **23**. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{8-x}{64-x^2}=\dfrac{1}{16}$ **24**. $\lim\limits_{x\to -1}\left[\dfrac{4x^2+1}{3x+2}\right]=-5$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4x^2+1}=1$ **26**. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2x}{63x-1}\right]=0$ **27**. $\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{sgn(x^2-1)}{x+4}\right]=\dfrac{1}{7}$

28. $\lim\limits_{x\to \frac{5}{2}}\left[\dfrac{\|\,x\,\|+2}{x^2}\right]=\dfrac{16}{25}$ **29**. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x-4}{5x+23}=-4$ **30**. $\lim\limits_{x\to -3}\left[\dfrac{\sqrt{-4x-3}}{x+2}\right]=-3$

10. Considere a sucessão $u_{n+1}=u_n+\dfrac{2-u_n^2}{2u_n}$ sendo $u_1=1$. Determine os primeiros elementos u_2, u_3, u_4 e calcule o limite de u_n quando n cresce indefinidamente.

11. Seja a sucessão definida pela relação de recorrência $u_n=\sqrt{2+u_{n-1}}$ sendo $u_1=\sqrt{2}$. Calcular o limite da sucessão u_n quando n cresce indefinidamente.

12. Mostre que a sequência $u_n=1+(-1)^n$ não tem limite quando n cresce indefinidamente.

3.2.1 Propriedades dos limites

Sabemos da seguinte propriedade de números reais:

Propriedade 3.2.

i) Seja $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq 0$, se $x < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, então $x = 0$.

ii) Quando $| x | < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$.

Demonstração.

i) Como $x \geq 0$, então $x = 0$ ou $x > 0$. A possibilidade $x > 0$ não pode acontecer, pois se $x > 0$ então do fato $x < \varepsilon$ e como $\varepsilon > 0$ em particular podemos escolher $\varepsilon = x$ de onde $\varepsilon = x < x$ o que é contraditório. Por tanto $x = 0$.

ii) Exercício para o leitor.

Propriedade 3.3. *Unicidade do limite.*

Quando exista o limite de uma função, este limite é único.

Demonstração.

Seja $\varepsilon > 0$ qualquer número real; e suponha que $\lim\limits_{x \to a} .f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to a} .f(x) = L_2$ sendo $L_1 \neq L_2$.

Será suficiente mostrar que $| L_1 - L_2 | < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$.

Do fato $\lim\limits_{x \to a} .f(x) = L_1$ da definição de limite temos que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$| f(x) - L_1 | < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{sempre que} \quad 0 < | x - a | < \delta_1$$

de modo análogo dado $\lim\limits_{x \to a} .f(x) = L_2$ da definição de limite temos que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta_2 > 0$ tal que

$$| f(x) - L_2 | < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{sempre que} \quad 0 < | x - a | < \delta_2$$

.

Considere $\delta = \min .\{ \delta_1, \ \delta_2 \}$ e $0 < | x - a | < \delta$ então cumprem-se as desigualdades $| f(x) - L_1 | < \frac{\varepsilon}{2}$ e $| f(x) - L_2 | < \frac{\varepsilon}{2}$.

Das propriedades de números reais, temos que: $| L_1 - L_2 | = | L_1 - f(x) + f(x) - L_2 | \leq$

$$\leq | f(x) - L_1 | + | f(x) - L_2 | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{para} \quad 0 < | x - a | < \delta$$

Assim mostramos que para todo $\varepsilon > 0$, sendo $0 < | x - a | < \delta$ verifica-se $| L_1 - L_2 | < \varepsilon$ o que implica pela Propriedade (3.2) que $L_1 = L_2$.

Propriedade 3.4. *Conservação do sinal.*

Se $\lim\limits_{x\to a} .f(x) = L \neq 0$, *existe uma vizinhança* $B(a,\ \delta)$ *tal que* $f(x)$ *e* L *tem o mesmo sinal* $\forall\, x \in B(a,\ \delta)$ *com* $x \neq a$.

A demonstração é exercício para o leitor.

Propriedade 3.5.

Se $\lim\limits_{x\to a} .f(x) = L$, *existe uma vizinhança* $B(a,\delta)$ *e um número* $M > 0$ *tal que* $\mid f(x) \mid < M, \quad \forall\, x \in B(a,\ \delta)$ *sendo* $x \neq a$.

Demonstração.

Da hipótese $\lim\limits_{x\to a} .f(x) = L$ temos que:

Dado $\varepsilon > 0, \quad \exists \quad \delta > 0\, /. \quad \forall\, x \in B(a,\ \delta), \quad x \neq a$ satisfaz $\mid f(x) - L \mid < \varepsilon$.

Das propriedades de números reais $\mid f(x) \mid - \mid L \mid < \mid f(x) - L \mid < \varepsilon$, então

$$\mid f(x) \mid - \mid L \mid < \varepsilon \quad \text{logo} \quad \mid f(x) \mid < \varepsilon + \mid L \mid$$

Considerando $M = \varepsilon + \mid L \mid$ temos que $\mid f(x) \mid < M \quad \forall\, x \in B(a,\ \delta)$ para $x \neq a$.

Propriedade 3.6.

Se f *e* g *são funções tais que cumpram as hipóteses:*

a) $f(x) \leq g(x) \qquad \forall\, x \in B(a,\ \delta)$ *com* $x \neq a$.

b) $\lim\limits_{x\to a} .f(x) = L$ *e* $\lim\limits_{x\to a} .g(x) = M$.

Então $L \leq M$, *isto é* $\lim\limits_{x\to a} .f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} .g(x)$.

A demonstração é exercício para o leitor.

Propriedade 3.7. *Do confronto.*

a) *Suponhamos* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *para todo* x *num intervalo aberto contendo* a, *exceto possívelmente o próprio* a

b) *Se* $\lim\limits_{x\to a} .f(x) = L = \lim\limits_{x\to a} .h(x)$, *então* $\lim\limits_{x\to a} .g(x) = L$.

Demonstração.

Pela hipótese **b)** para cada $\varepsilon > 0$ existem positivos δ_1 e δ_2 tais que:

$$0 < \mid x - a \mid < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \tag{3.4}$$

$$0 < \mid x - a \mid < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon \tag{3.5}$$

Considerando $\delta = \min .\{\ \delta_1,\ \delta_2\ \}$, para $0 <\mid x - a \mid< \delta$ cumpre-se simultaneamente (3.4) e (3.5) e como $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Então

$$0 <\mid x - a \mid< \delta \quad \text{implica} \quad L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

isto é $0 <\mid x - a \mid< \delta$ implica

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \mid g(x) - L \mid< \varepsilon$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to a} .g(x) = L$. □

Esta propriedade do confronto, também é conhecida como o "Princípio do Sanduíche".

Propriedade 3.8.

Sejam f *e* g *duas funções tais que cumpram as hipóteses:*

a) $\lim\limits_{x \to a} .f(x) = 0$.

b) *Existe* $M > 0$ *tal que* $\mid g(x) \mid< M \quad \forall\, x \in B(a,\ \delta)$ *com* $x \neq a$.

Então $\lim\limits_{x \to a} .f(x).g(x) = 0$.

A demonstração é exercício para o leitor. □

Exemplo 3.13.

Suponhamos que $f(x) = ax^2 + bx + c$ *onde* $a,\ b$ *e* c *são constantes tais que* $\mid f(x) \mid\leq\mid x^3 \mid \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$. *Mostre que* $a = b = c = 0$.

Demonstração.

Como $0 \leq\mid ax^2 + bx + c \mid\leq\mid x^3 \mid$ e $\lim\limits_{x \to 0} .0 = \lim\limits_{x \to 0} \mid x^3 \mid= 0$, pela *Propriedade* (3.7) segue que $\lim\limits_{x \to 0} \mid ax^2 + bx + c \mid= c = 0$.

Então podemos escrever $f(x) = ax^2 + bx$; assim $0 \leq\mid ax^2 + bx \mid\leq\mid x^3 \mid$ para $x \neq 0$, logo $0 \leq\mid ax + b \mid\leq\mid x^2 \mid \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, aplicando novamente a *Propriedade* (3.7) resulta $\lim\limits_{x \to 0} \mid ax + b \mid= b = 0$.

Então temos $f(x) = ax$; assim $0 \leq\mid ax \mid\leq\mid x^3 \mid$ para $x \neq 0$, logo $0 \leq\mid a \mid\leq\mid x \mid \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, aplicando novamente a *Propriedade* (3.7) resulta $\lim\limits_{x \to 0} \mid a \mid= a = 0$.

Portanto, $a = b = c = 0$.

Propriedade 3.9. *Propriedades adicionais dos limites.*

Sejam f *e* g *duas funções e* C *número real constante, tais que* $\lim\limits_{x \to a} .f(x) = L$ *e* $\lim\limits_{x \to a} .g(x) = M$ *então:*

a) $\lim\limits_{x \to a} .C = C$

b) $\lim\limits_{x\to a} .C \cdot f(x) = C \cdot \lim\limits_{x\to a} .f(x) = C \cdot L$

c) $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} \cdot f(x) + \lim\limits_{x\to a} \cdot g(x) = L + M$

d) $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} \cdot f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} \cdot g(x) = L \cdot M$

e) $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{1}{g(x)}\right] = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} \cdot g(x)} = \dfrac{1}{M}$ sempre que $M \neq 0$.

f) $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} \cdot f(x)}{\lim\limits_{x\to a} \cdot g(x)} = \dfrac{L}{M}$ sempre que $M \neq 0$.

A demonstração é exercício para o leitor.

Propriedade 3.10.

Se $\lim\limits_{x\to a} f_i(x) = L_i$ *para todo* $i = 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n$ *então:*

a) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x)] = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n$

b) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x) \times f_2(x) \times f_3(x) \times \cdots \times f_n(x)] = L_1 \times L_2 \times L_3 \times \cdots \times L_n$

A demonstração desta propriedade é exercício para o leitor.

Propriedade 3.11.

Suponha $\lim\limits_{x\to a} .f(x) = L$ *e* $n \in \mathbb{Z}$, *então,* $\lim\limits_{x\to a} .[f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to a} .f(x)]^n = L^n$.
Quando $n \leq 0$, *então* L *tem que ser diferente de zero.*

Demonstração.

A demonstração desta propriedade é exercício para o leitor.

Propriedade 3.12.

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *e* $n \in \mathbb{Z}$, *então,*

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

onde L *é número positivo e* n *qualquer inteiro positivo ou* $L < 0$ *e* n *qualquer inteiro positivo ímpar.*

A demonstração desta propriedade é exercício para o leitor.

Exemplo 3.14.

Calcular o limite: $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{5x^2 - 10x - 6}{x^3 - 10}\right]$.

Solução.

Aplicando a Propriedade (3.9) **f)** obtemos que $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{5x^2-10x-6}{x^3-10}\right]=\dfrac{-6}{-2}=3$.

Exemplo 3.15.

Calcular o seguinte limite $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{\dfrac{3x^2-2x+3}{x^5+2}}$.

Solução.

Pela *Propriedade* (3.12) temos que:

$$\lim_{x\to -1}\sqrt{\frac{3x^2-2x+3}{x^5+2}}=\sqrt{\lim_{x\to -1}\left[\frac{3x^2-2x+3}{x^5+2}\right]}=\sqrt{\frac{8}{1}}=2\sqrt{2}$$

Exemplo 3.16.

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$.

Solução.

Pela *Propriedade* (3.9) **f)** resulta que,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(x^3-2x-3)}{\lim\limits_{x\to 0}(x-4)}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$$

Exemplo 3.17.

Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{6x-6}{x^2-3x+2}\right]$.

Solução.

Observe, ao aplicar a *Propriedade* (3.9) **f)** de quociente de limites teríamos um quociente da forma $\dfrac{0}{0}$ no limite, sendo esta uma forma indeterminada. No possível, para evitar isto temos que escrever numerador e denominador na forma de fatores $(x-1)$ do modo seguinte:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{6x-6}{x^2-3x+2}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{6(x-1)}{(x-1)(x-2)}\right]$$

Desde que $x\to 1$, então $(x-1)\to 0$ ainda $(x-1)$ não é zero; logo podemos simplificar no limite acima para obter:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{6x-6}{x^2-3x+2}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{6(x-1)}{(x-1)(x-2)}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{6}{x-2}\right]=\frac{6}{-1}=-6$$

Observação 3.4.

i) São formas indeterminadas:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \infty-\infty,\quad \infty^0,\quad 0^0,\quad 0^\infty,\quad \infty^\infty,\quad 1^\infty,\quad 0\cdot\infty$$

Se, no cálculo de limites aparecem alguma destas formas, para o cálculo de limites devemos utilizar processos ou artifícios com o propósito de evitar a forma indeterminada.

ii) Seja $n \in \mathbb{N}$, para a racionalização, lembre:

$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$

$a^n - b^n = (a-b)\cdot(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Quando n é ímpar:

$a^n + b^n = (a+b)\cdot(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + \cdots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$

Exemplo 3.18.

Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{1}{2-x} - \dfrac{12}{8-x^3}\right]$.

Solução.

Observe que: $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{1}{2-x} - \dfrac{12}{8-x^3}\right] = \lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{(4+2x+x^2)}{(2-x)(4+2x+x^2)} - \dfrac{12}{8-x^3}\right] =$

$$= \lim_{x\to 2}\left[\frac{4+2x+x^2-12}{8-x^3}\right] = \lim_{x\to 2}\left[\frac{2x+x^2-8}{8-x^3}\right] = \lim_{x\to 2}\left[\frac{-(2-x)(x+4)}{(2-x)(4+2x+x^2)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 2}\left[\frac{-(x+4)}{4+2x+x^2}\right] = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{1}{2-x} - \dfrac{12}{8-x^2}\right] = -\dfrac{1}{2}$

Exemplo 3.19.

Calcular o limite: $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1}\right]$

Solução.

Este limite é da forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$; assim, multiplicando pela conjugada do numerador temos: $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{3})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})}{(x-1)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})}\right] =$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{2}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})}\right] = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1}\right] = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Exemplo 3.20.

Determine o valor do seguinte limite: $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1-\sqrt{x^2-3x+3}}{\sqrt{4x^2-3}-1}\right]$

Solução.

No limite multiplicando o numerador e denominador pelo fator

$$F(x)=(1+\sqrt{x^2-3x+3})(\sqrt{4x^2-3}+1)$$

temos: $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{(1-\sqrt{x^2-3x+3})F(x)}{(\sqrt{4x^2-3}-1)F(x)}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{(1-x^2+3x-3)(\sqrt{4x^2-3}+1)}{(4x^2-4)(1+\sqrt{x^2-3x+3})}\right]=$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{-(x-1)(x-2)(\sqrt{1}+1)}{4(x-1)(x+1)(1+\sqrt{1})}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{-(x-2)}{4(x+1)}\right]=\frac{1}{8}$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1-\sqrt{x^2-3x+3}}{\sqrt{4x^2-3}-1}\right]=\dfrac{1}{8}$

Exemplo 3.21.

Determine o valor do seguinte limite: $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{\sqrt[3]{x^3-2x-3}-\sqrt[3]{2x^2-7}}{2x^3+x-18}\right]$.

Solução.

Para o limite, multiplicando o numerador e denominador pelo fator

$$F(x)=(\sqrt[3]{x^3-2x-3})^2+(\sqrt[3]{x^3-2x-3})\cdot(\sqrt[3]{2x^2-7})+(\sqrt[3]{2x^2-7})^2$$

temos $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{(\sqrt[3]{x^3-2x-3}-\sqrt[3]{2x^2-7})\cdot F(x)}{(2x^3+x-18)\cdot F(x)}\right]=$

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{(x^3-2x-3)-(2x^2-7)}{(2x^3+x-18)\cdot F(x)}\right]=\lim_{x\to 2}\left[\frac{(x^2-2)(x-2)}{(2x^2+4x+9)(x-2)\cdot F(x)}\right]=$$

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{(x^2-2)}{(2x^2+4x+9)\cdot F(x)}\right]=\frac{2}{25\cdot F(2)}=\frac{2}{(25)(3)}=\frac{2}{75}$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{\sqrt[3]{x^3-2x-3}-\sqrt[3]{2x^2-7}}{2x^3+x-18}\right]=\dfrac{2}{75}$

Exemplo 3.22.

Como variam as raízes da equação quadrada $ax^2+bx+c=0$ *quando,* b *e* c *conservam seus valores constantes* ($b>0$) *e o parâmetro* a *tende para zero ?*

Solução.

Aplicando a fórmula de Bhaskara as raízes da equação são:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Quanto $a \to 0$ podemos escrever na forma:

Para a raiz x_1

$$\lim_{a\to 0} x_1 = \lim_{a\to 0} \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \lim_{a\to 0} \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})} \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{a\to 0} x_1 = \lim_{a\to 0} \frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}} = -\frac{c}{b}$$

Para a raiz x_2

$$\lim_{a\to 0} x_2 = \lim_{a\to 0} \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \lim_{a\to 0} \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{2a(-b+\sqrt{b^2-4ac})} \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{a\to 0} x_2 = \lim_{a\to 0} \frac{2c}{(-b+\sqrt{b^2-4ac})} = \infty$$

Portanto, uma das raízes converge para $-\dfrac{c}{b}$ e a outra diverge (aproxima-se rapidamente ao infinito).

Exercícios 3-2

1. Mostre as seguintes propriedades.

   1. $\lim\limits_{x\to a} .f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to a} \mid f(x) \mid = 0.$

   2. $\lim\limits_{x\to a} .f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to a}[f(x) - L] = 0$

   3. $\lim\limits_{x\to a} .f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to a} \mid f(x) \mid = \mid L \mid.$

   4. $\lim\limits_{x\to a} .f(x) = \lim\limits_{h\to 0} .f(a+h)$

2. Apresentar um exemplo de modo que:

   1. Exista $\lim\limits_{x\to a} \mid f(x) \mid$ e não exista $\lim\limits_{x\to a} \cdot f(x)$.

   2. Exista $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)]$ e não existam $\lim\limits_{x\to a} \cdot f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} \cdot g(x)$.

3. Caso existam os limites $\lim\limits_{x\to a} \cdot f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)]$. Existe $\lim\limits_{x\to a} \cdot g(x)$?

4. Caso existam os limites $\lim\limits_{x\to a} \cdot f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)]$. Existe $\lim\limits_{x\to a} \cdot g(x)$?

5. Caso exista $\lim\limits_{x\to a} \cdot f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} \cdot g(x)$ não existe, então existe $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)]$?

6. Mostre que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, se e somente se $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$ existe.

7. Mostre que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, se e somente se $\lim\limits_{x\to 0} f(x+a)$ existe.

8. Mostre que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe, se e somente se $\lim\limits_{x\to 0} f(x^3)$ existe.

9. Considere a função $f(x) = \dfrac{x^2 - mx + 3x - 3m}{x - m}$, determine os valores de m tal que $\lim\limits_{x\to m} .f(x) = m^2 - 17$.

10. Seja a função $f(x) = \dfrac{x^3 - 2a^2x + ax^2}{2ax + x^2}$, e $\lim\limits_{x\to 1} .f(x) = 2a - 5$. Determine o valor de $a > 0$.

11. Mostre que, ao crescer n indefinidamente, a sequência $u_n = \dfrac{2^n + (-2)^n}{2^n}$ não tem limite. A sequência $v_n = \dfrac{2^n + (-2)^n}{3^n}$ tem limite? Justificar sua resposta.

12. Calcular os seguintes limites:

1. $\lim\limits_{x\to 4}\left[\dfrac{3x^2-17x+20}{4x^2-25x+36}\right]$ **2**. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x^5-1}{x^6-1}\right]$ **3**. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{5x-10}{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{2}}\right]$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{3x-6}{1-\sqrt{4x-7}}\right]$ **5**. $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{x^2-a^2}{x^3-a^3}\right]$ **6**. $\lim\limits_{x\to 20}\left[\dfrac{2\sqrt[4]{x-4}-4}{\sqrt[5]{x+12}-2}\right]$

7. $\lim\limits_{x\to -3}\left[\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+7}-4}\right]$ **8**. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}\right]$ **9**. $\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3x}-3}\right]$

10. $\lim\limits_{x\to 8}\left[\dfrac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2}{x-8}\right]$ **11**. $\lim\limits_{x\to 64}\left[\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}\right]$ **12**. $\lim\limits_{x\to 8}\left[\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[3]{x}+4}{(x-8)^2}\right]$

13. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x^2+\sqrt[3]{x-2}-4}{\sqrt[3]{4-x\sqrt{3x-2}}}\right]$ **14**. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{2x^{2n}+1-3x^{-2n}}{3x^{2n}-5+2x^{-2n}}\right]$

15. $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{\sqrt{b^2-x}-\sqrt{b^2-a}}{x-a}\right]$ **16**. $\lim\limits_{x\to 2+}\left[\dfrac{\sqrt{3x}-\sqrt{8-x}}{3x-2\sqrt{15-3x}}\right]$

17. $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}\right]$ $a>0$ **18**. $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{x^2-(a-1)x-a}{x^2-(a-2)x-2a}\right]$

13. Verifique os seguintes limites, para as funções indicadas:

1. $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}\right]=-\dfrac{1}{50}$ se $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$

2. $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}\right]=-16$ se $f(x)=8x^2$

14. Verifique o cálculo dos seguintes limites:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{2}{3x-6}-\dfrac{2}{2x^2-5x+2}\right]=\dfrac{4}{9}$ **2**. $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{x^7-a^7}{x^3-a^3}\right]=\dfrac{7a^4}{3}$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\left[\dfrac{4x^4+9x^3+3x^2+x+3}{3x^4+9x^3+9x^2+3x}\right]=1$ **4**. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sqrt[3]{x+27}-3}{\sqrt[4]{x+16}-2}\right]=\dfrac{32}{27}$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}\right]=\dfrac{11}{17}$ **6**. $\lim\limits_{x\to 4}\left[\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}\right]=-\dfrac{1}{3}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{\sqrt{x^3}+3\sqrt{x}-3x-1}{x+3\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x^2}-1}\right]=\dfrac{27}{8}$ **8**. $\lim\limits_{x\to -3}\left[\dfrac{x^3+6x^2+9x}{x^3+5x^2+3x-9}\right]=\dfrac{3}{4}$

15. Se $f(2)=6$, o qué podemos concluir do $\lim\limits_{x\to 2}.f(x)$? Justificar sua resposta.

16. Se $\lim\limits_{x\to 2}.f(x)=6$, podemos obter conclusão a respeito de $f(2)$ Justificar sua resposta.

17. Sabe-se que $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{f(x)}{1-x^3}\right]=4$ e $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{g(x)}{1-x^2}\right]=-6$. Prove que $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=-1$

18. Se $\lim\limits_{x\to -2}\left[\dfrac{f(x+2)}{\sqrt{-2x}-2}\right]=8$ e $\lim\limits_{x\to -2}\left[\dfrac{g(x+2)}{x^2-4}\right]=3$. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$.

19. Seja R o retângulo que se obtém ao unir os pontos médios dos lados do quadrilátero Q, o qual tem seus vértices $(\pm x,\ 0)$ e $(0,\ \pm y)$. Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\text{perimetro de } R}{\text{perimetro de } Q}$.

20. Os custos da construção de um prédio de apartamentos foram de $R\$1.500.000,00$, e esta quantia foi depreciada pelo método da linha reta por 15 anos, a partir de 1985. Qual foi o valor líquido do prédio em 1993.

21. Sejam $f : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções tais que: $\lim\limits_{x\to c} f(x) > \lim\limits_{x\to c} g(x)$.
Mostre que existe $\delta > 0$ tal que: $\forall \quad 0 < |x-c| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > g(x), \quad c \in (a,\, b)$.

22. Demonstre que, se $| \ x \ | < \varepsilon, \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$.

23. Demonstre que, se $\lim\limits_{x\to a} .f(x) = L \neq 0$, existe uma vizinhança $B(a,\ \delta)$ tal que $f(x)$ e L tem o mesmo sinal $\quad \forall\, x \in B(a,\ \delta)$ com $x \neq a$.

24. Demonstre que, se f e g são funções tais que cumpram as hipóteses:

a) $f(x) \leq g(x) \qquad \forall\, x \in B(a,\ \delta)$ com $x \neq a$.

b) $\lim\limits_{x\to a} .f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} .g(x) = M$.
Então $L \leq M$, isto é $\lim\limits_{x\to a} .f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} .g(x)$.

25. Demonstre que, se f e g duas funções tais que cumpram as hipóteses:

a) $\lim\limits_{x\to a} .f(x) = 0$.

b) Existe $M > 0$ tal que $| \ g(x) \ | < M \quad \forall\, x \in B(a,\ \delta)$ com $x \neq a$.

Então $\lim\limits_{x\to a} .f(x).g(x) = 0$.

26. Demonstre que, se f e g duas funções e C número real constante, tais que $\lim\limits_{x\to a} .f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} .g(x) = M$ então:

a) $\lim\limits_{x\to a} .C = C$

b) $\lim\limits_{x\to a} .C \cdot f(x) = C \cdot \lim\limits_{x\to a} .f(x) = C \cdot L$

c) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} \cdot f(x) + \lim\limits_{x\to a} \cdot g(x) = L + M$

d) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} \cdot f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} \cdot g(x) = L \cdot M$

e) $\lim\limits_{x\to a} \left[\dfrac{1}{g(x)}\right] = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} \cdot g(x)} = \dfrac{1}{M}$ sempre que $M \neq 0$.

f) $\lim\limits_{x\to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} \cdot f(x)}{\lim\limits_{x\to a} \cdot g(x)} = \dfrac{L}{M}$ sempre que $M \neq 0$.

27. Demonstre que, se $\lim\limits_{x\to a} f_i(x) = L_i$ para todo $i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$ então:

a) $\lim_{x\to a}[f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x)] = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n$

b) $\lim_{x\to a}[f_1(x) \times f_2(x) \times f_3(x) \times \cdots \times f_n(x)] = L_1 \times L_2 \times L_3 \times \cdots \times L_n$

28. Demonstre que, se $\lim_{x\to a}.f(x) = L$ e $n \in \mathbb{Z}$, então, $\lim_{x\to a}.[f(x)]^n = [\lim_{x\to a}.f(x)]^n = L^n$. Quando $n \leq 0$, então L tem que ser diferente de zero?

29. Demonstre que, se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $n \in \mathbb{Z}$, então

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

onde L é número positivo e n qualquer inteiro positivo ou $L < 0$ e n qualquer inteiro positivo ímpar.

3.3 Limites laterais

Ao calcularmos $\lim\limits_{x\to a} .f(x)$, o problema reduz-se a calcular o número L para o qual aproximam-se os valores de $f(x)$ quando x tende para a, tanto para valores maiores que a (pela direita) quanto para valores de menores que a (pela esquerda).

Considerando a função $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{se,} \quad x < 2 \\ 5-x, & \text{se,} \quad x \geq 2 \end{cases}$,

observa-se o seguinte:

a) Quando x aproxima-se a 2 pela direita, $f(x)$ aproxima-se a 3 como mostra a *Figura* (3.5); isto é chamado de *limite lateral de* $f(x)$ *quando* x *tende a* 2 *pela direita*, e escreve-se $\lim\limits_{x\to 2^+} .f(x) = 3$

Figura 3.5:

b) Quando x aproxima-se a 2 pela esquerda, $f(x)$ aproxima-se a 1 como mostra a *Figura* (3.5); isto é chamado de *limite lateral de* $f(x)$ *quando* x *tende a* 2 *pela esquerda*, e denotado $\lim\limits_{x\to 2^-} .f(x) = 1$.

Em geral temos as seguintes definições:

Definição 3.3.
Sejam $a < c$ *e* $f(x)$ *uma função definida no intervalo* $(a,\ c)$*; dizemos que* L *é o limite lateral de* $f(x)$ *quando* x *tende para* a *pela direita e denotamos* $\lim\limits_{x\to a^+} .f(x)$ *ou* $f(a^+)$*; se, dado* $\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0\ /.\ \ \forall\, x \in \text{D}(f),\ \ |\, f(x) - L \,| < \varepsilon$ *sempre que* $0 < x - a < \delta$.

Definição 3.4.
Sejam $b < a$ *e* $f(x)$ *uma função definida no intervalo* $(b,\ a)$*; dizemos que* L *é o limite lateral de* $f(x)$ *quando* x *tende para* a *pela esquerda e denotamos* $\lim\limits_{x\to a^-} .f(x)$ *ou* $f(a^-)$ *se, dado* $\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0\ /.\ \ \forall\, x \in \text{D}(f),\ \ |\, f(x) - L \,| < \varepsilon$ *sempre que* $0 < a - x < \delta$.

Propriedade 3.13.
$\lim\limits_{x\to a} .f(x) = L$ *se, e somente se* $\lim\limits_{x\to a^+} .f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} .f(x) = L$.

Demonstração.

Exercício para o leitor.

Observação 3.5.

Nos seguintes casos o $\lim\limits_{x\to a}.f(x)$ *não existe:*

i) Quando não existe um dos limites laterais.

ii) Quando os limites laterais existem e são diferentes.

3. Quando o limite não for um número real L, isto é quando o limite for $\pm\infty$.

Quando a função estiver definida para $x < a$ e $x > a$, geralmente ao calcular $\lim\limits_{x\to a}.f(x)$ é necessário calcular os limites laterais de $f(x)$

Exemplo 3.23.

$$\text{Determine o } \lim_{x\to 1}.g(x)\ ,\ \text{se } g(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & \text{se}, \quad x > 1 \\ 1, & \text{se}, \quad x = 1 \\ 2 - x, & \text{se}, \quad x < 1 \end{cases}$$

Solução.

Observe que, numa vizinhança de $x = 1$ a função esta definida de diferentes modos (*Figura* (3.6)), é por isso que é necessário calcular os limites laterais.

$\lim\limits_{x\to 1^+}.g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(2x^2 - 1) = 1$, por outro lado:

$\lim\limits_{x\to 1^-}.g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(2 - x) = 1.$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 1}.g(x) = 1$

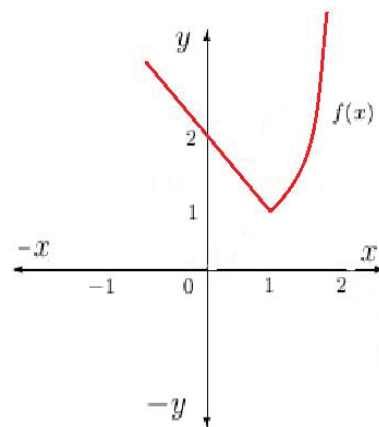



Figura 3.6:

Exemplo 3.24.

Seja $f(x) = \dfrac{|\,x+2\,|}{4+2x}$, *determine se existe o limite* $\lim\limits_{x\to -2}.f(x)$.

Solução.

$$\text{Como } |\,x+2\,| = \begin{cases} x+2, & \text{se}, \quad x \geq -2 \\ -x-2, & \text{se}, \quad x < -2 \end{cases} \quad \text{então:}$$

$$\lim_{x\to -2^+}.f(x) = \lim_{x\to -2^+}\frac{x+2}{4+2x} = \lim_{x\to -2^+}\frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to -2^-}.f(x) = \lim_{x\to -2^-}\frac{-x-2}{4+2x} = \lim_{x\to -2^-}\frac{-1}{2} = \frac{-1}{2}$$

Observe que os limites laterais são diferentes, logo não existe $\lim\limits_{x\to -2}.f(x)$

Exemplo 3.25.

Os custos de transporte de mercadorias são usualmente calculados por uma fórmula que resulta em custos mais baixos por quilo à medida que a carga aumenta. Suponhamos que

x seja o peso de uma carga a ser transportada, e $C(x) = \begin{cases} 0,85x, & se, \quad 0 < x \leq 50 \\ 0,75x, & se, \quad 50 < x \leq 200 \\ 0,60x, & se, \quad 200 < x \end{cases}$
o custo total em reais.

Ache cada um dos seguintes limites: **a)** $\lim\limits_{x \to 50} .C(x)$ *e* **b)** $\lim\limits_{x \to 200} .C(x)$

Solução.

a) Para calcular o limite, $\lim\limits_{x \to 50} .C(x)$, temos que achar os limites laterais: $\lim\limits_{x \to 50^-} .C(x) = \lim\limits_{x \to 50^-} (0,85x) = 42,5$ e $\lim\limits_{x \to 50^+} .C(x) = \lim\limits_{x \to 50^+} (0,75x) = 37,5$; sendo diferentes não existe $\lim\limits_{x \to 50} .C(x)$.

b) De modo análogo:

$\lim\limits_{x \to 200^-} .C(x) = \lim\limits_{x \to 200^-} (0,75x) = 150$ e
$\lim\limits_{x \to 200^+} .C(x) = \lim\limits_{x \to 200^+} (0,60x) = 120$;
Sendo diferentes os limites laterais, logo não existe $\lim\limits_{x \to 200} .C(x)$

Se desejamos saber o custo de transporte de $x = 50$ quilos, teríamos a pagar $C(50) = (0,80)(50) = 42,5$ reais, e de $x = 200$ é $C(200) = (0,75)(200) = 150$ reais.

3.4 Limites ao infinito

A função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, está definida de tal modo que os valores $f(x)$ ficam arbitrariamente pequenos quando consideramos os valores de x os mais grandes possíveis (em valor absoluto). Assim, f é localmente limitada para valores extremamente grandes de x, próximos do infinito. Embora exista o limite de f quando $x \to \infty$, e isto deve ficar claro, pois não existe um número $x = a$ nas condições da Definição (3.2) de limites. Se escreve $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

Definição 3.5.
Seja $f : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, *uma função e* $L \in \mathbb{R}$, *dizemos que* L *é o limite de* $f(x)$ *quando* x *tende para* $+\infty$ *e escrevemos* $\lim\limits_{x \to +\infty} .f(x) = L$ *se, e somente se dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $N > 0$ *tal que* $| f(x) - L | < \varepsilon$ *sempre que* $x > N$.

Definição 3.6.
Seja $g : (-\infty, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, *uma função e* $L \in \mathbb{R}$, *dizemos que* L *é o limite de* $g(x)$ *quando* x *tende para* $-\infty$ *e escrevemos* $\lim\limits_{x \to -\infty} .g(x) = L$ *se, e somente se dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $N > 0$ *tal que* $| g(x) - L | < \varepsilon$ *sempre que* $x < -N = M$.

Destas definições, podemos interpretar que, em tanto seja maior (ou menor) o valor de x, a diferença entre $f(x)$ e L é cada vez menor, o qual significa que $f(x)$ aproxima-se cada vez mas para L como observa-se na *Figura* (3.7).

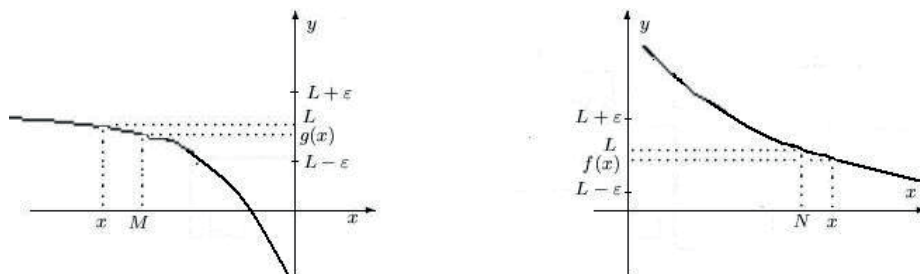



Figura 3.7:

Propriedade 3.14.

Seja $n \in \mathbb{N}$ então:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

Demonstração.

i) Dado $\varepsilon > 0$, existe $N = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}} > 0$ tal que para $x > N = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$ temos $\dfrac{1}{x^n} < \varepsilon$; assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que $\mid \dfrac{1}{x^n} \mid < \varepsilon$ sempre que $x > N$. Portanto $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.

ii) Analogamente. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}} > 0$ tal que para $x < -N = -\dfrac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$ temos $-x > \dfrac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$ então, $0 < -\dfrac{1}{x} < \sqrt[n]{\varepsilon}$ isto é $\mid \dfrac{1}{x^n} \mid < \varepsilon$.

Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$, temos $\mid \dfrac{1}{x^n} \mid < \varepsilon$ sempre que $x < -N$.

Portanto $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.

Propriedade 3.15.

Sejam f e g duas funções definidas em $(a, +\infty)$ e $(b, +\infty)$ respectivamente; se $\lim\limits_{xto+\infty} .f(x) = L$ e $\lim\limits_{xto+\infty} .g(x) = M$ então:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} [C \cdot f(x)] = C \cdot L$ para C constante.

b) $\lim\limits_{xto+\infty} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{xto+\infty} .f(x) + \lim\limits_{xto+\infty} .g(x) = L + M$

c) $\lim\limits_{xto+\infty} [f(x) \times g(x)] = \lim\limits_{xto+\infty} .f(x) \times \lim\limits_{xto+\infty} .g(x) = L \times M$

d) $\lim\limits_{xto+\infty}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim\limits_{xto+\infty}.f(x)}{\lim\limits_{xto+\infty}.g(x)}=\dfrac{L}{M}$ desde que $M\neq 0$.

A demonstração é exercício para o leitor.

Quando x tende para $-\infty$ obtém-se propriedades similares as da *Propriedade* (3.15).

Aplicação dos limites ao infinito

Exemplo 3.26.

Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x^2-6x+2}{x^2+2x-3}\right]$.

Solução.

Temos $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x^2-6x+2}{x^2+2x-3}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2\left(3-\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}\right]$, logo aplicando a *Propriedade* (3.14) obtemos $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x^2-6x+2}{x^2+2x-3}\right]=\dfrac{3-0+0}{1+0-0}=3$.

Exemplo 3.27.

Suponha, a número positivo, calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{ax^2}]$.

Solução.

Temos $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{ax^2}]=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{ax^2})(\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{ax^2})}{(\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{ax^2})}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{ax^2}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\left(b+\frac{c}{x}\right)}{x\left(\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\sqrt{a}\right)}\right]=\frac{b}{2\sqrt{a}}$$

Exemplo 3.28.

Suponha a número positivo, calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{ax^2}]$.

Solução.

$\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{ax^2}]=(+\infty)+(+\infty)=+\infty$.

Exemplo 3.29.

Determine o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2x-4}\right]$

Solução.

Temos a função $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2x-4}$ e seu domínio é o conjunto $[-2,\ 2)$, isto significa que não podemos calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2x-4}\right]$.

Portanto não existe o limite.

Exemplo 3.30.

Calcular $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}\right]$

Solução.

Observe, que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right]= \;\Rightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\cdot\left[\frac{\sqrt[3]{1+0}}{(1+0)}\right]=0$$

Exemplo 3.31.

Determine o valor do seguinte limite: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{\sqrt{x^2+1}+3x}{2x-5}\right]$

Solução.

Do fato $x\to\infty$, então temos que calcular o limite quando $x\to+\infty$ e $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}+3x}{2x-5}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x(\sqrt{1+x^{-2}}+3)}{x(2-5x^{-1})}\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{1+x^{-2}}+3}{2-5x^{-1}}\right]=\frac{\sqrt{1+0}+3}{2-0}=2$$

Para o cálculo quando $x\to-\infty$, como $\sqrt{x^2}=\mid x\mid=-x$, para valores negativos de x então:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}+3x}{2x-5}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\mid x\mid\sqrt{1+x^{-2}}+3x}{x(2-5x^{-1})}\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x(-\sqrt{1+x^{-2}}+3)}{x(2-5x^{-1})}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-\sqrt{1+x^{-2}}+3}{2-5x^{-1}}\right]=\frac{-\sqrt{1+0}+3}{2-0}=1$$

Os limites são diferentes; portanto, não existe $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{\sqrt{x^2+1}+3x}{2x-5}\right]$.

Exemplo 3.32.

Calcular: $\lim\limits_{x\to-\infty}[\sqrt{4x^2+3x-1}+2x]$.

Solução.

$$\lim_{x\to-\infty}[\sqrt{4x^2+3x-1}+2x]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{(\sqrt{4x^2+3x-1}+2x)(\sqrt{4x^2+3x-1}-2x)}{\sqrt{4x^2+3x-1}-2x}\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{4x^2+3x-1-4x^2}{\sqrt{4x^2+3x-1}-2x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x(3-x^{-1})}{|\ x\ |\ \sqrt{4+3x^{-1}-x^{-2}}-2x}\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x(3-x^{-1})}{x(-\sqrt{4+3x^{-1}-x^{-2}}-2)}\right]=-\frac{3}{4}$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to-\infty}[\sqrt{4x^2+3x-1}+2x]=-\dfrac{3}{4}$.

Exemplo 3.33.

Determine o valor do seguinte limite: $\lim\limits_{x\to-\infty}[5+\sqrt{4x^2-x+3}+2x]$.

Solução.

$$\lim_{x\to-\infty}[5+\sqrt{4x^2-x+3}+2x]=\lim_{x\to-\infty}[\sqrt{4x^2-x+3}+2x+5]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}[\sqrt{4x^2-x+3}+2x]+\lim_{x\to-\infty}5$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{(\sqrt{4x^2-x+3}+2x)(\sqrt{4x^2-x+3}-2x)}{\sqrt{4x^2-x+3}-2x}\right]+\lim_{x\to-\infty}5=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{4x^2-x+3-4x^2}{\sqrt{4x^2-x+3}-2x}\right]+5=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x(-1+3x^{-1})}{|x|\sqrt{4-x^{-1}+3x^{-2}}-2x}\right]+5=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x(-1+3x^{-1})}{-x(\sqrt{4-x^{-1}+3x^{-2}}-2)}\right]+5=\frac{-1}{-4}+5=\frac{21}{4}$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to-\infty}[5+\sqrt{4x^2-x+3}+2x]=\dfrac{21}{4}$.

Exemplo 3.34.

Determine o limite das seguintes sequências:

a) $1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{4},\ \cdots\dfrac{(-1)^{n-1}}{n},\ \cdots$

b) $2,\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{6}{5},\ \dfrac{8}{7},\ \cdots\dfrac{2n}{2n-1},\ \cdots$

c) $\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\cdots$

Solução.

a) O termo geral da sequência esta dado por $s_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $n>1$, logo se n par resulta $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$; para o caso n ímpar $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-1}{n}=0$.

Portanto, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}=0$

b) Observe que o termo geral da sequência é: $a_n = \dfrac{2n}{2n-1}$, calculando o limite temos:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{2-\dfrac{1}{n}} = 1. \text{ Portanto } \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{2n-1} = 1$$

c) Verificar que o limite é 2, é exercício para o leitor.

Exemplo 3.35.

Mostre que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} .f(\frac{1}{x}) = \lim_{x\to+\infty} .f(x)$.

Demonstração.

Seja $L = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} .f(x)$, então pela definição deste limite temos

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad \exists N > 0 \quad /. \quad |f(x) - L| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad x > N$$

Podemos supor $\dfrac{1}{N} = M > 0$, se $0 < \dfrac{1}{M} < x$, então $0 < \dfrac{1}{x} < M$, com isto $|f(\dfrac{1}{x}) - L| < \epsilon$, sempre que $0 < x$, assim $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} .f(\frac{1}{x}) = L$.

Portanto, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} .f(\frac{1}{x}) = \lim_{x\to+\infty} .f(x)$.

Exercícios 3-3

1. Calcular os seguintes limites:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{\sqrt[3]{5x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x}-3x+2}\right]$ **2.** $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{x^2-a^2}{2x^2-ax-a^2}\right]\quad a>0$

3. $\lim\limits_{x\to -2}\left[\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{3x^2+3x-6}\right]$ **4.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sqrt[5]{x+1}-3\sqrt[6]{x+1}+2}{\sqrt[18]{x+1}+\sqrt[25]{x+1}-2}\right]$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{|x^3-1|}{|x-1|+|x-1|^2}\right]$ **6.** $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{\sqrt[3]{h^3+1}+\sqrt[5]{h^5+1}+h^3-2}{h-h\sqrt{h^2+1}}\right]$

7. $\lim\limits_{x\to 5}\left[\dfrac{2-\sqrt{x-1}}{1-\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}}\right]$ **8.** $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1-x^2}{(1-ax)^2-(a-x)^2}\right]\quad 0<a\neq 1$

9. $\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{x^2+\sqrt[3]{x-3}-9}{\sqrt[3]{9-x\sqrt{4x-3}}}\right]$ **10.** $\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}\right]$

11. $\lim\limits_{x\to -3}\left[\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{-9x}+1}-2}{2-\sqrt[3]{x+11}}\right]$ **12.** $\lim\limits_{a\to b}\left[\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}-2\sqrt{x+\frac{a+b}{2}}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{b+x}}\right]$

13. $\lim\limits_{a\to b}\left[\dfrac{\sqrt{x^2+2ax+a^2}+\sqrt[3]{x^3+\frac{a-b}{3}}-2x-b}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x+b}}\right]\quad b>0,\ a>0.$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sqrt{x+a+b}-\sqrt{a+b}}{x}\right]\quad a>0,\ b>0$

2. Suponha $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) < \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ (construir o gráfico) Mostre que existe algum $\delta>0$ tal que $f(x)<f(y)$ sempre que $x<a<y$, $\quad |x-a|<\delta$ e $|y-a|<\delta$. Cumpre-se a recíproca?

3. Verifique o cálculo dos seguintes limites:

1. $$\lim_{x\to 20}\left[\left(\frac{\sqrt{5x}-10}{2\sqrt{5}-\sqrt{x}}\right)\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt[5]{\frac{8x}{5}}}}{\sqrt{400-x^2}}\right)\right]=-\frac{1}{20}$$

2. $$\lim_{x\to 2}\left[\left(\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}\right)\left(\frac{\sqrt[n]{x-1}-1}{\sqrt[m]{x-1}-1}\right)\right]=\frac{6m}{n};\qquad m,\ n\in\mathbb{N},\quad n\neq 0$$

3. $$\lim_{a\to b}\left[\frac{\sqrt{x^2+\frac{a-b}{2}}-\sqrt[3]{x^3+\frac{b-a}{3}}-2x-(b-a)^2}{\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{x+b}}\right]=\frac{\sqrt[3]{(b+x)^2}(9x+4)}{12x^2}$$

4. $$\lim_{x\to 3}\left[\frac{|x-3|^2+26|x+3|-26\sqrt{\sqrt{3x}+33}}{4-2\sqrt[3]{\frac{x^2+15x-6}{x+3}}}\right]=-69$$

5. $\displaystyle\lim_{x\to -5}\left[\frac{\|\ \frac{1}{5}\sqrt[3]{100x+2sgn(16-x^4)}\ \| + \sqrt[3]{x^2+2}+x+4}{\sqrt{x^2+\sqrt{-5x}+6}-6}\right] = \frac{272}{189}$

4. Dar exemplo de uma função monótona tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$.

5. Para cada um dos seguintes exercícios, traçar o gráfico e calcular o limite indicado caso exista; justificar sua resposta.

1. $f(x) = \dfrac{x+\mid 2-x \mid}{x^2-4}$ $\quad\lim\limits_{x\to 2^+} .f(x) \qquad \lim\limits_{x\to 2^-} .f(x)$

2. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se, } \ x \leq 2 \\ 8-2x, & \text{se, } \ x > 2 \end{cases}$ $\quad\lim\limits_{x\to 2} .f(x)$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x-3}, & \text{se, } \ x < 3 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x+2}, & \text{se, } \ x \geq 3 \end{cases}$ $\quad\lim\limits_{x\to 3} .f(x)$

4. $f(x) = \begin{cases} 3+x^2, & \text{se, } \ x < 0 \\ 0, & \text{se, } \ x = 0 \\ 11-x^2, & \text{se, } \ x > 0 \end{cases}$ $\quad\lim\limits_{x\to 0} .f(x)$

5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-5}{1-\sqrt{x-4}}, & \text{se, } \ x \geq 5 \\ \dfrac{x^2-12x+35}{x-5}, & \text{se, } \ < 5 \end{cases}$ $\quad\lim\limits_{x\to 5} .f(x)$

6. $f(x) = \begin{cases} 6x-x^2, & \text{se, } \ x < 2 \\ 6, & \text{se, } \ x = 2 \\ 2x^2-x-3, & \text{se, } \ x > 2 \end{cases}$ $\quad\lim\limits_{x\to 2} .f(x)$

7. $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{se, } \ x < 1 \\ 1, & \text{se, } \ 1 < x \leq 2 \\ \mid x-3 \mid, & \text{se, } \ x > 2 \end{cases}$ $\quad\lim\limits_{x\to 1} .f(x) \qquad \lim\limits_{x\to 2} .f(x)$

6. Nos seguintes exercícios determine se existe o limite; caso contrário justificar sua resposta.

1. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{5}{3}} \sqrt{\mid x \mid + [|3x|]+4}$ **2.** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{5}{2}} \sqrt{\mid x \mid + [|3x|]+4}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sqrt{[|9+x^2|]}$ **4.** $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left|\frac{x^3-x^2+3x-3}{x-1}\right|$ **6.** $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+3x-3}{\mid x-1 \mid}$

7. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{\mid x-2 \mid}$ **8.** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{6}} \frac{x^2+[|\frac{x}{3}|]}{[|3x|]-10}$

9. $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x^2 + [|\frac{x}{3}|]}{[|2x|] + 10}$ **10.** $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{\sqrt{-9x} + \sqrt[3]{x} - 2}{x+1}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}[3x + sgn(\mid x^2 - 1 \mid -1)]$ **12.** $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}[x^2 - sgn(\mid x^2 - 1 \mid -1)]$

13. $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}[x^2 + 5 + sgn(\mid x^2 - 1 \mid -1)]$ **14.** $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}[x^4 - sgn(\mid x^2 - 1 \mid -1)]$

15. $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{\sqrt[36]{x-1} - \sqrt[9]{x-1}}{3x^2 - 3 + \sqrt[36]{x-1}} - \dfrac{\sqrt{x^3} - 1 + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right]$

16. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{5\sqrt[5]{x-2} + 3\sqrt[3]{2-x} + 2\sqrt{2x-1} + 6x^2 - 6}{x^2 - x}$

17. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + \sqrt{x^2} + 3\sqrt{x} - 3x}{(x-1)^2}$

18. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{5\sqrt[5]{x+2} + 4\sqrt[4]{-1-2x} + 3\sqrt[3]{2+x} - 2\sqrt{-1-2x} + 5x + 3}{x^2 - x}$

7. Calcular se existem os seguintes limites:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - 100n^2 + 1}{100n^2 + 15n}$ **2**. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{2} - 1}{\sqrt[n]{2} + 1}$ **3**. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n-1}$ **5**. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^2}{2n^2}$ **6**. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^4 + (n-1)^4}$ **8**. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{2n^2}$ **9**. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - 1}{2n^2 + 1}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[5]{n^3 + 2n - 1}}{n+2}$ **11**. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{n^2 + 1} + n$ **12**. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + 5}{n^2 - 3}$

8. Demonstrar que:

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} .f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} .f(-x)$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0} f(\mid x \mid) = \lim\limits_{x\to 0^+} .f(x)$

3. $\lim\limits_{x\to 0} .f(x^2) = \lim\limits_{x\to 0^+} .f(x)$

9. Determine o valor dos limites, caso exista:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$ **2**. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{n^2} + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)\right]$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^4 - (n-1)^4}{(2n+1)^4 + (n-1)^4}$ **4**. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n+2} - \dfrac{n}{2}\right]$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$ **6**. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3 - 2n + 1} + \sqrt[3]{n^4 + 1}}{\sqrt[4]{n^6 + 6n^5 + 2} - \sqrt[5]{n^7 + 3n^3 + 1}}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + n}{n^4 - 3n^2 + 1}$ **8**. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1\times 3} + \dfrac{1}{3\times 5} + \cdots \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

9. $\lim\limits_{n\to 1} \dfrac{n^2 - 2n + 1}{n^3 - n}$ **10**. $\lim\limits_{n\to 1} \dfrac{n+2}{n^2 - 5n + 4} + \dfrac{n-4}{3(n^2 - 3n + 2)}$

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}\quad m,n\in\mathbb{Z}$ **12.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{2n+1}-\dfrac{(2n+1)(3n^2+n+2)}{4n^2}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100n^3+3n^2}{0,001n^4-100n^3+1}$ **14.** $\lim\limits_{n\to 2}\dfrac{1}{n(n-2)^2}-\dfrac{1}{n^2-3n+2}$

10. Se f é uma função limitada em intervalos limitados. Mostre que:

$$\lim_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x)]\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

11. Verificar o valor dos seguintes limites:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4n^3+2n^2-5}{n+2-8n^3}=-\dfrac{1}{2}$ **2.** $\lim\limits_{n\to-\infty}\dfrac{5n^3-n^2+n-1}{n^4-n^3-2n+1}=0$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2-2}{2n+1}+\dfrac{n^2-4n}{n-3}=\infty$ **4.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+3}{n+\sqrt[3]{n}}=2$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{8n-4}{(3-\sqrt{n})(\sqrt{n}+2)}}=-2$ **6.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+3}}}}{\sqrt{n+3}}=1$

.7 $\lim\limits_{n\to+\infty}[\sqrt{n^2-5n+6}-n]=-\dfrac{5}{2}$ **8.** $\lim\limits_{n\to-\infty}[\sqrt{n^2-2n+4}+n]=1$

9. $\lim\limits_{n\to+\infty}[\sqrt{n\sqrt{2n}-5n+6}-n]=-\infty$ **10.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6}+1}=4$

11. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{a+a^2n^2}+\sqrt{b+a^2n^2}-2\sqrt{a^2n^2-\dfrac{a+b}{2}}=0$

12. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[7]{a^7n^7+a}+\sqrt{n^2-4}}{\sqrt[5]{a-1-a^5n^5}+\sqrt[4]{n^4-25a^2+144}}=\dfrac{1+a}{1-a}$

12. Mostre que $\lim\limits_{x\to+\infty}.f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}.f(-x)$.

13. Mostre que **1.** $\lim\limits_{x\to 0^-}.f(\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{x\to-\infty}.f(x)$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0^+}.f(\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}.f(x)$.

14. Mostre que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots b_1x+b_0}$ existe se, e somente se $m\geq n$. Qual é o valor do limite se $m=n$?. E quando $m<n$?

15. Calcular os seguintes limites:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots b_1x+b_0}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)+(x+2)^2+(x+3)^3+\cdots+(x+n)^n}{x^n-n^n}\qquad n\in\mathbb{N}.$

3.5 Limites infinitos

Observe que a mesma função da seção anterior $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, está definida de tal modo que os valores $f(x)$ ficam arbitrariamente grandes, considerando x mais e mais próximo de 0. Assim, f não é localmente limitada em $x = 0$, embora não exista o limite de f em $x = 0$, e isto deve ficar claro, pois não existe um número $L \in \mathbb{R}$ nas condições da Definição (3.2) de limites. Nesta situação se escreve $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$.

Seja f uma função definida num intervalo aberto I que contenha ao número a, podendo o número a não estar no domínio de f.

Definição 3.7.
Dizemos que o limite de $f(x)$ é $+\infty$ quando x tende ao ponto a e escrevemos $\lim\limits_{x\to a} .f(x) = +\infty$; se, dado $K > 0$ (tão grande como quiser), existe $\delta > 0$ tal que $0 <\mid x - a \mid < \delta$ implica $f(x) > K$.

Definição 3.8.
Dizemos que o limite de $f(x)$ é $-\infty$ quando x tende ao ponto a e escrevemos $\lim\limits_{x\to a} .f(x) = -\infty$; se, dado $K > 0$ (tão grande como quiser), existe $\delta > 0$ tal que $0 <\mid x - a \mid < \delta$ implica $f(x) < -K$.

Propriedade 3.16.

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

Demonstração.

i) Para qualquer $K > 0$, existe $\delta = \dfrac{1}{K} > 0$ tal que $0 < x < \delta = \dfrac{1}{K}$; então $\dfrac{1}{x} > K$.

Portanto $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

ii) Para qualquer $K > 0$, existe $\delta = \dfrac{1}{K} > 0$ tal que $-\delta = -\dfrac{1}{K} < x < 0$; então $\dfrac{1}{x} < -K$.

Portanto $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Os dois limites são denotados por $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$ e $\dfrac{1}{0^-} = -\infty$ respectivamente.

Propriedade 3.17.

Se n é um inteiro positivo, então:

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \textit{se, } n \textit{ é par} \\ -\infty, & \textit{se, } n \textit{ é ímpar} \end{cases}$

A demonstração é exercício para o leitor.

Definição 3.9.

Seja f uma função de domínio $D(f)$. Então:

i) *Se $D(f) = (a, +\infty)$ define-se:*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} .f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0,\ \exists M > 0$ *tal que* $x > M \Rightarrow f(x) > K.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} .f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K > 0,\ \exists M > 0$ *tal que* $x > M \Rightarrow f(x) < -K.$

ii) *Se $D(f) = (-\infty, b)$ define-se:*

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0,\ \exists M > 0$ *tal que* $x < -M \Rightarrow f(x) > K.$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K > 0,\ \exists M > 0$ *tal que* $x < -M \Rightarrow f(x) < -K.$

A *Definição* (3.9) i)-a) significa que para valores de x positivos muito grandes, os valores de $f(x)$ também são positivos e muito grandes. Similar interpretação para as outras definições.

Exemplo 3.36.

Mostre que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty.$

Solução.

Seja $K > 0$, considerando $M = \sqrt{K}$ temos, se $x > \sqrt{K} \Rightarrow x^2 > K.$

Exemplo 3.37.

Determine o valor do limite: $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{1+\sqrt{x}}{x-2}$

Solução.

$$\lim_{x\to2^+} \frac{1+\sqrt{x}}{x-2} = \lim_{x\to2^+} (1+\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{x-2} = (1+\sqrt{2})(+\infty) = +\infty.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{1+\sqrt{x}}{x-2} = +\infty.$

Observação 3.6.

Por comodidade escrevemos o símbolo ∞ (infinito) com o significado seguinte: $\lim\limits_{x\to a} .f(x) = \infty$ *se, e somente se* $\lim\limits_{x\to a} .|f(x)| = +\infty.$

Propriedade 3.18.

Sejam $a \in \mathbb{R}$ as funções $f(x)$, $g(x)$ e $C \neq 0$ número real fixo, tais que $\lim\limits_{x\to a} .f(x) = 0$ *e* $\lim\limits_{x\to a} .g(x) = C$ *então:*

i) Se $C > 0$ e $f(x) \to 0$ através dos valores positivos de $f(x)$, então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty.$

ii) Se $C > 0$ e $f(x) \to 0$ através dos valores negativos de $f(x)$, então $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$.

iii) Se $C < 0$ e $f(x) \to 0$ através dos valores positivos de $f(x)$, então $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$.

iv) Se $C < 0$ e $f(x) \to 0$ através dos valores negativos de $f(x)$, então $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$.

A demonstração é exercício para o leitor. □

A *Propriedade* (3.18) podemos resumir do modo seguinte:

i) $\dfrac{C}{0^+} = \begin{cases} +\infty, & \text{se, } C > 0 \\ -\infty, & \text{se, } C < 0 \end{cases}$ **ii)** $\dfrac{C}{0^-} = \begin{cases} +\infty, & \text{se, } C < 0 \\ -\infty, & \text{se, } C > 0 \end{cases}$

Propriedade 3.19.

Sejam f *e* g *duas funções reais tais que:*

a) $\lim_{x\to\pm\infty} .f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to\pm\infty} .g(x) = \pm\infty$ então: $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) + g(x)] = \pm\infty$ e $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) \cdot g(x)] = +\infty$

b) $\lim_{x\to\pm\infty} .f(x) = \pm\infty$, $L > 0$ e $\lim_{x\to\pm\infty} .g(x) = \pm\infty$ então: $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)+g(x)] = \pm\infty$ e $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) \cdot g(x)] = +\infty$

c) $\lim_{x\to\pm\infty} .f(x) = \pm\infty$, $L < 0$ e $\lim_{x\to\pm\infty} .g(x) = \pm\infty$ então: $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)+g(x)] = \pm\infty$ e $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) \cdot g(x)] = \pm\infty$

d) $\lim_{x\to\pm\infty} .f(x) = -\infty$, e $\lim_{x\to\pm\infty} .g(x) = +\infty$ então: $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) \cdot g(x)] = -\infty$

e) $\lim_{x\to\pm\infty} .f(x) = L$, $L \neq 0$ e $\lim_{x\to\pm\infty} .g(x) = \pm\infty$ então: $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

A demonstração é exercício para o leitor. Ao substituir a expressão $x \to \pm\infty$ por $x \to a$ estas propriedades permanecem válidas. □

A *Propriedade* (3.19) podemos resumir, usando os seguintes símbolos para K constante

diferente de zero.

i)	$K + (+\infty) = +\infty$	**ii**)	$K + (-\infty) = -\infty$
iii	$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	**iv**)	$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
v)	$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$	**vi**)	$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
vii)	$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$	**viii**)	$\dfrac{K}{\pm\infty} = 0$
ix)	$K \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{se}, \quad K > 0 \\ -\infty, & \text{se}, \quad K < 0 \end{cases}$	**x**)	$(-\infty)^n = \begin{cases} +\infty, & \text{se}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{é par} \\ -\infty, & \text{se}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{é ímpar} \end{cases}$
xi)	$K \cdot (-\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{se}, \quad K < 0 \\ -\infty, & \text{se}, \quad K > 0 \end{cases}$		

Exemplo 3.38.

Seja $f(x) = \dfrac{5x^4 + 1}{x^2 + x - 2}$, *calcular* $\lim\limits_{x \to 1^-} .f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} .f(x)$ *e* $\lim\limits_{x \to 1} .f(x)$.

Solução.

Ao substituirmos $x = 1$ em $f(x)$, observamos que temos a forma $\dfrac{6}{0}$ o qual indica que o cálculo dos três limites é infinito. Para determinar o sinal de $\infty(+\infty$ ou $-\infty)$ devemos calcular o comportamento da função para valores próximos a $x = 1$.

i) $\lim\limits_{x \to 1}[5x^4 + 1] = 6$

ii) $\lim\limits_{x \to 1}[x^2 + x - 2] = 0$

Para $x < 1$ (próximo a 1) temos $(x - 1) < 0$ e $(x + 2) > 0$; logo o produto $(x - 1).(x + 2) < 0$, assim $\lim\limits_{x \to 1^-} (x + 2)(x - 1) = 0^-$.

Analogamente, para $x > 1$ (próximo a 1) temos $(x - 1) > 0$ e $(x + 2) > 0$; logo o produto $(x - 1).(x + 2) > 0$, assim $\lim\limits_{x \to 1^+} (x + 2)(x - 1) = 0^+$.

Então:

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} .f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left[\dfrac{5x^4 + 1}{x^2 + x - 2}\right] = \lim\limits_{x \to 1^-} \left[\dfrac{6}{0^-}\right] = -\infty.$

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} .f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left[\dfrac{5x^4 + 1}{x^2 + x - 2}\right] = \lim\limits_{x \to 1^+} \left[\dfrac{6}{0^+}\right] = +\infty.$

c) $\lim\limits_{x \to 1} .f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left|\dfrac{5x^4 + 1}{x^2 + x - 2}\right| = +\infty.$ então $\lim\limits_{x \to 1} .f(x) = +\infty.$

Exemplo 3.39.

Calcular o limite $\lim\limits_{x \to 3^-} \left[\dfrac{3x + 1}{x^2 - x - 6}\right].$

Solução.

$$\lim_{x\to 3^-}\left[\frac{3x+1}{x^2-x-6}\right]=\lim_{x\to 3^-}\left[\frac{3x+1}{(x-3)(x+2)}\right]=\lim_{x\to 3^-}\left[\frac{10}{(x-3)\cdot 5}\right]=-\infty$$

Exemplo 3.40.

Determine o valor do seguinte limite: $\lim\limits_{x\to -3}\left[\dfrac{-5x-81}{(x+3)(x-1)}\right]$.

Solução.

Calculemos os limites laterais:

$$\lim_{x\to -3^+}\left[\frac{-5x-81}{(x+3)(x-1)}\right]=\lim_{x\to -3^+}\left[\frac{-5x-81}{x-1}\right]\left[\frac{1}{x+3}\right]=\left(\frac{-96}{-4}\right).(+\infty)=(+\infty)$$

$$\lim_{x\to -3^-}\left[\frac{-5x-81}{(x+3)(x-1)}\right]=\lim_{x\to -3^-}\left[\frac{-5x-81}{x-1}\right]\left[\frac{1}{x+3}\right]=\left(\frac{-96}{-4}\right).(-\infty)=(-\infty)$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to -3}\left[\dfrac{-5x-81}{(x+3)(x-1)}\right]=\infty.$

Exemplo 3.41.

Determine o valor do seguinte limite: $\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{x^2-5x+4}{\sqrt{x^2-5x+6}}\right]$.

Solução.

No cálculo de limites laterais quando $x\to 3^+$ temos:

$$\lim_{x\to 3^+}\left[\frac{x^2-5x+4}{\sqrt{x^2-5x+6}}\right]=\lim_{x\to 3^+}[x^2-5x+4]\left[\frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}\right]=(-2).(+\infty)=-\infty$$

Quando $x\to 3^-$ temos:

$$\lim_{x\to 3^-}\left[\frac{x^2-5x+4}{\sqrt{x^2-5x+6}}\right]=\lim_{x\to 3^+}[x^2-5x+4]\left[\frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}\right]=(-2).(\frac{1}{\sqrt{0^-}})=\nexists$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{x^2-5x+4}{\sqrt{x^2-5x+6}}\right]=\nexists$, (não existe).

Exemplo 3.42.

Calcular, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *onde* $P(x)$ *e* $Q(x)$ *são polinômios de grau* n *e* m *respectivamente.*

Solução.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^n(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n})}{x^m(b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_{m-2}}{x^2}+\cdots+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m}}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{a_0x^n}{b_0x^m}\right]\quad\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\infty, & \text{se,}\quad n>m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{se,}\quad n=m\\ 0, & \text{se,}\quad n<m\end{cases}$$

Exemplo 3.43.

Calcular o limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{6x^3-2x+1}{5x^2-3}\right]$.

Solução.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{6x^3-2x+1}{5x^2-3}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3(6-\frac{2}{x2}+\frac{1}{x^3})}{x^2(5-\frac{3}{x^2})}\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x(6-0+0)}{(5-0)}\right]=\frac{+\infty}{5}=+\infty$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{6x^3-2x+1}{5x^2-3}\right]=+\infty$.

Exemplo 3.44.

Calcular o limite $\lim\limits_{x\to 2^+}\left[\dfrac{\sqrt[3]{8-x^3}}{x^2-4}\right]$.

Solução.

$$\lim_{x\to 2^+}\left[\frac{\sqrt[3]{8-x^3}}{x^2-4}\right]=\lim_{x\to 2^+}\sqrt[3]{\frac{8-x^3}{(x^2-4)^3}}=\lim_{x\to 2^+}\sqrt[3]{\frac{(2-x)(4+2x+x^2)}{(x+2)^3(x-2)^3}}=$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\sqrt[3]{\frac{(4+2x+x^2)}{(x+2)^3(x-2)^2}}=\lim_{x\to 2^+}\sqrt[3]{\frac{12}{64(x-2)^2}}=+\infty$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 2^+}\left[\dfrac{\sqrt[3]{15-x^3}}{x^2-4}\right]=+\infty$.

3.6 Limite de funções transcendentes

3.6.1 Limites trigonométricos

Para o cálculo de limites trigonométricos consideremos a seguinte propriedade.

Propriedade 3.20.

1. $\lim\limits_{x\to 0}.\text{sen}x=0$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0}.\cos x=1$ **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\text{sen}x}{x}\right]=1$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\tan x}{x}\right]=1$ **5.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1-\cos x}{x}\right]=0$ **6.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right]=\dfrac{1}{2}$

Demonstração. **1.**

A função seno verifica $|\ \text{sen}x\ | \leq |\ x\ |$ para todo $x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$.

Mostrarei que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\ \text{sen}x\ | < \varepsilon$ sempre que $0 < |\ x\ | < \delta$.

Seja $\varepsilon > 0$ qualquer e considere $\delta_1 = \varepsilon$ e $\delta = \min .\{\ \delta_1,\ \dfrac{\pi}{2}\}$; logo da desigualdade $0 < |\ x\ | < \delta$ verifica-se que

$$|\ \text{sen}x\ | < |\ x\ | < \delta \leq \varepsilon$$

Figura 3.8:

Isto é, $\quad |\ \text{sen}x\ | < \varepsilon$.

Portanto $\lim\limits_{x \to 0} .\text{sen}x = 0$.

Demonstração. **2.**

Observe que, $\lim\limits_{x \to 0} . \cos x = \lim\limits_{x \to 0} . \sqrt{1 - (\text{sen}x)^2} = \sqrt{1 - [\lim\limits_{x \to 0} .\text{sen}x]^2} = 1$.

Demonstração. **3.**

Da *Figura* (3.8) temos as desigualdades: $\overline{BB'} \leq \text{Arco}\widehat{AC} \leq \overline{AT}$.

Então $\text{sen}x < x < \tan x$, sendo a função $\text{sen}x$ positiva no intervalo $(0, \dfrac{\pi}{2})$ temos $1 < \dfrac{x}{\text{sen}x} < \dfrac{1}{\cos x}$ logo, $\cos x < \dfrac{\text{sen}x}{x} < 1$ aplicando o limite, pela parte **2.** de esta propriedade e da propriedade do sanduíche segue-se que:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\text{sen}x}{x} = 1 \tag{3.6}$$

Seja $x = -t$, então quando $x \to 0^-$ temos $t \to 0^+$, assim: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\text{sen}x}{x} = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{\text{sen}(-t)}{(-t)} = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{-\text{sen}t}{-t}$, então:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\text{sen}x}{x} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\text{sen}t}{t} = 1 \tag{3.7}$$

De (3.6) e (3.7) segue-se que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}x}{x} = 1$

Demonstração. **4.**

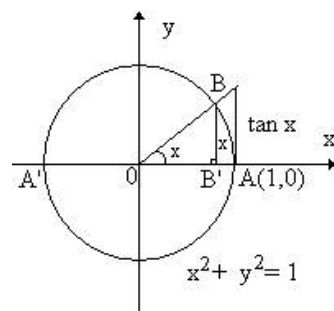
Temos $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1$

Demonstração. **5.**

De identidades trigonométricas temos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}x}{x} \cdot \frac{\text{sen}x}{1 + \cos x} = 1.\frac{0}{2} = 0$$

Demonstração. **6.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\text{sen}x}{x}\right]^2\left[\frac{1}{1+\cos x}\right]=1.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

3.6.2 Limites das funções trigonométricas inversas

Para o cálculo dos limites das funções trigonométricas inversas, é necessário considerar os limites que se mencionam na seguinte propriedade:

Propriedade 3.21.

a) $\lim\limits_{x\to 0}.\text{arcsen}x=0$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}.\arccos x=+\dfrac{\pi}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{arcsen}x}{x}=1$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty}.\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$ **f)** $\lim\limits_{x\to +\infty}.\arctan x=+\dfrac{\pi}{2}$

Demonstração.

a) Considere a seguinte mudança de variáveis: $t=\text{arcsen}x$ onde $-1\leq x\leq 1$ e $-\dfrac{\pi}{2}\leq t\leq\dfrac{\pi}{2}$, então $x=\text{sen}t$, se $x\to 0$ temos $t\to 0$.

Logo, $\lim\limits_{x\to 0}.\text{arcsen}x=\lim\limits_{t\to 0}.t=0$.

c) Fazendo mudança de variáveis como na demonstração da parte **a)** temos $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{arcsen}x}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\text{sen}t}=1$.

Exemplo 3.45.

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}6x}{x}$.

Solução.

Considere a mudança de variáveis $6x=t$; então quando $x\to 0$, teremos que $t=6x\to 0$ assim, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}6x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\cdot\text{sen}6x}{6x}=6.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}6x}{6x}=6.\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\text{sen}t}{t}=6(1)=6$.

Exemplo 3.46.

Determine o valor do limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}ax}{\text{sen}bx}$.

Solução.

Observe que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}ax}{\text{sen}bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}ax}{\text{sen}bx}\cdot\dfrac{a.bx}{a.bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{\frac{\text{sen}ax}{ax}}{\frac{\text{sen}bx}{bx}}$, quando $x\to 0$ temos $ax\to 0$ e $bx\to 0$, assim resulta que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a}{b}\cdot\frac{\frac{\text{sen}ax}{ax}}{\frac{\text{sen}bx}{bx}}=\frac{a}{b}.\frac{\left[\lim\limits_{ax\to 0}\frac{\text{sen}ax}{ax}\right]}{\left[\lim\limits_{bx\to 0}\frac{\text{sen}bx}{bx}\right]}=\frac{a}{b}.1=\frac{a}{b}$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}ax}{\text{sen}bx}=\dfrac{a}{b}$.

Exemplo 3.47.

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\text{sen}^2(\text{sen}3x)}{1-\cos(\text{sen}4x)}\right]$.

Solução.

Quando $x\to 0$ temos $t=\text{sen}3x\to 0$ e $r=\text{sen}4x\to 0$; logo fazendo mudança de variável, segue que $t\to 0$ e $r\to 0$ então:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\text{sen}^2(\text{sen}3x)}{1-\cos(\text{sen}4x)}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{[\text{sen}(\text{sen}3x)]^2}{1-\cos(\text{sen}4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\text{sen}3x)^2\left[\frac{\text{sen}(\text{sen}3x)}{\text{sen}3x}\right]^2}{(\text{sen}^2 4x)\left[\frac{1-\cos(\text{sen}4x)}{\text{sen}^2 4x}\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{9\left[\frac{\text{sen}3x}{3x}\right]^2\left[\frac{\text{sen}(\text{sen}3x)}{\text{sen}3x}\right]^2}{16\left[\frac{\text{sen}4x}{4x}\right]^2\left[\frac{1-\cos(\text{sen}4x)}{\text{sen}^2 4x}\right]}=\frac{9\left[\lim\limits_{3x\to 0}\frac{\text{sen}3x}{3x}\right]^2}{16\left[\lim\limits_{4x\to 0}\frac{\text{sen}4x}{4x}\right]^2}\cdot\frac{\left[\lim\limits_{t\to 0}\frac{\text{sen}t}{t}\right]^2}{\left[\lim\limits_{r\to 0}\frac{1-\cos r}{r^2}\right]}=\frac{9[1]^2}{16[1]^2}\cdot\frac{[1]^2}{\left[\frac{1}{2}\right]}=\frac{9}{8}$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\text{sen}^2(\text{sen}3x)}{1-\cos(\text{sen}4x)}\right]=\dfrac{9}{8}$.

Exemplo 3.48.

Determine o valor do limite $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\cos x-\cos(\text{sen}4x)}{x^2}\right]$.

Solução.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos x-\cos(\text{sen}4x)}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos(\text{sen}4x)}{x^2}-\frac{1-\cos x}{x^2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos(\text{sen}4x)}{x^2}\right]\left[\frac{\text{sen}4x}{\text{sen}4x}\right]^2-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos(\text{sen}4x)}{\text{sen}^2 4x}\right]\left[\frac{\text{sen}4x}{x}\right]^2-\frac{1}{2}=$$

$$=\lim_{\text{sen}4x\to 0}\left[\frac{1-\cos(\text{sen}4x)}{\text{sen}^2 4x}\right]\cdot\left[\lim_{4x\to 0}\frac{\text{sen}4x}{x}\right]^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot 16(1)^2-\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\cos x-\cos(\text{sen}4x)}{x^2}\right]=\dfrac{15}{2}$. □

Exemplo 3.49.

Determine o valor do limite $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{\text{arcsen}(x-2)}{x^2-2x}\right]$.

Solução.

Temos aplicando a *Propriedade* (3.20) c) que:

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{\text{arcsen}(x-2)}{x^2-2x}\right]=\lim_{x\to 2}\left[\frac{\text{arcsen}(x-2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x}\right]=(1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Portanto $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left[\frac{\text{arcsen}(x-2)}{x^2-2x}\right]=\frac{1}{2}.$

Exemplo 3.50.

Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\text{arcsen}(3x)\sqrt{\tan x}}{x\sqrt{\csc x-\cot x}}\right].$

Solução.

Do fato ser a tangente positiva quando $x\to 0^+$ então existe $\sqrt{\tan x}$; para o caso $x<0$ temos $\tan x<0$, logo não tem sentido o limite $x\to 0^-$. Observe que quando $x\to 0^+$ então $3x\to 0^+$ e da *Propriedade* (3.20) c) segue:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\text{arcsen}(3x)\sqrt{\tan x}}{x\sqrt{\csc x-\cot x}}\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{3\cdot\text{arcsen}(3x)}{(3x)}\right]\sqrt{\frac{\tan x}{\csc x-\cot x}}=$$

$$=3(1)\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{\tan x}{\csc x-\cot x}}=3.\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{\frac{\tan x}{x}}{x\cdot\csc x\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\right]}}=3.\sqrt{\frac{1}{1(\frac{1}{2})}}=3\sqrt{2}$$

Portanto, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\text{arcsen}(3x)\sqrt{\tan x}}{x\sqrt{\csc x-\cot x}}\right]=3\sqrt{2}.$

3.6.3 Limite da função exponencial e logarítmica

Considere os seguintes limites sem demonstração:

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{n!}=0$

2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$

3. $\displaystyle\lim_{n\to a}\text{Ln}[f(x)]=\text{Ln}\left[\lim_{n\to a}f(x)\right]$

4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{1}{n}\right]^n=e$ onde $e\approx 2,71828182\cdots$

Exemplo 3.51.

Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1+x}.$

Solução.

Quando $x\to 0$, então $n=\dfrac{1}{x}\to+\infty$, fazendo mudança de variável no limite original resulta: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1+x}=\lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{1}{n}\right]^n=e.$

Portanto, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1+x}=e.$

Exemplo 3.52.

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{Ln}(1+x)}{x}$.

Solução.

Temos: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{Ln}(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\text{Ln}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \text{Ln}\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \text{Ln}e = 1.$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{Ln}(1+x)}{x} = 1.$

Exemplo 3.53.

Calcular $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1+\dfrac{a}{n}\right]^n$, *sendo* $a > 0$ *número real qualquer:*

Solução.

Se $n \to +\infty$, então $m = \dfrac{n}{a} \to +\infty$, logo

$$\lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{a}{n}\right]^n = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{a}}\right)^{\frac{n}{a}}\right]^a = \lim_{m\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^a = e^a$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1+\dfrac{a}{n}\right]^n = e^a$ □

Exemplo 3.54.

Verificar a seguinte igualdade: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h} = \text{Ln}(a).$

Solução.

Seja $s = a^h - 1$, então $h\cdot\text{Ln}(a) = \text{Ln}(s+1)$, quando $h \to 0$ temos $s \to 0$, no limite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{s}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{s\cdot\text{Ln}(a)}{h\cdot\text{Ln}(a)} = \lim_{h\to 0}\frac{s\cdot\text{Ln}(a)}{\text{Ln}(a^h)} = \lim_{s\to 0}\frac{s\cdot\text{Ln}(a)}{\text{Ln}(s+1)} \quad\Rightarrow$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = \text{Ln}(a)\cdot\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}\frac{\text{Ln}(s+1)}{s}} = \text{Ln}(a)$$

isto pelo *Exemplo* (3.52).

Portanto, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h} = \text{Ln}(a)$

Exemplo 3.55.

Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^x$ *sendo* $\lim\limits_{x\to\infty}.f(x)$ *um número finito.*

Solução.

Seja $m = \dfrac{f(x)}{x}$, pelo fato ser $\lim\limits_{x\to\infty}.f(x)$ um número real finito, quando $x \to \infty$, $m \to 0$.
Considere $y = \left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^x$ então pelas propriedades do logaritmo:

$$\text{Ln}(y) = x\cdot\text{Ln}(1+m) = \frac{f(x)}{m}\cdot\text{Ln}(1+m) = f(x)\cdot\frac{\text{Ln}(1+m)}{m}$$

$$\lim_{x\to\infty} \text{Ln}(y) = \lim_{x\to\infty} \text{Ln}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} f(x)\cdot\frac{\text{Ln}(1+m)}{m} \quad \Rightarrow$$

pelo *Exemplo* (3.52) segue:

$$\text{Ln}\left(\lim_{x\to\infty} y\right) = \lim_{x\to\infty} f(x)\cdot\lim_{m\to 0}\frac{\text{Ln}(1+m)}{m} = \lim_{x\to\infty} f(x).(1) = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

Logo $\text{Ln}\left(\lim_{x\to\infty} y\right) = \lim_{x\to\infty} .f(x) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} y = e^{\lim\limits_{x\to\infty} .f(x)}$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty} .f(x)}$.

Exemplo 3.56.

Calcular $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{(1+\alpha)^n - 1}{\alpha}$.

Solução.

Seja $m = (1+\alpha)^n - 1$, então $\text{Ln}(m+1) = n\cdot\text{Ln}(1+\alpha)$; quando, $\alpha\to 0$, $m\to 0$, logo no limite temos:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^n - 1}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} .\frac{m}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} .\frac{m\cdot n\cdot\text{Ln}(1+\alpha)}{\alpha\cdot n\cdot\text{Ln}(1+\alpha)} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} .\frac{m\cdot n\cdot\text{Ln}(1+\alpha)}{\alpha\cdot\text{Ln}(1+m)} = \lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{\text{Ln}(1+\alpha)}{\alpha}\right]\left[\frac{m}{\text{Ln}(1+m)}\right]\cdot n =$$

Aplicando resultado do Exemplo (3.52), $= \lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\text{Ln}(1+\alpha)}{\alpha}\cdot\left[\dfrac{1}{\lim\limits_{m\to 0}\dfrac{\text{Ln}(1+m)}{m}}\right]\cdot n = n.$

Portanto, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{(1+\alpha)^n - 1}{\alpha} = (1)(1)n = n.$

Observação 3.7.

Para o cálculo dos limites da forma $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ *considere os seguintes casos:*

1^o **Caso :** Se existem $\lim\limits_{x\to a} .f(x) = A$ e $\lim\limits_{x\to a} .g(x) = B$ e são finitos, então o limite $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = A^B$.

2^o **Caso :** Se existem $\lim\limits_{x\to a} .f(x) = A \neq 1$ e $\lim\limits_{x\to a} .g(x) = B$ sendo $B = \pm\infty$, então o limite:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \begin{cases} +\infty, & \text{se, } A > 1 \text{ e } B = +\infty \\ -\infty, & \text{se, } A > 1 \text{ e } B = -\infty \\ 0, & \text{se, } 0 < A < 1 \text{ e } B = +\infty \\ +\infty, & \text{se, } 0 < A < 1 \text{ e } B = -\infty \end{cases}$$

.

3^o **Caso :** Se $\lim\limits_{x\to a}.f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to a}.g(x) = \pm\infty$; nesta caso $1^{\pm\infty}$ é uma forma indeterminada; logo temos que definir $h(x) = f(x) - 1$ de modo que $\lim\limits_{x\to a}.h(x) = 0$; logo $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}[1 + h(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\left[[1 + h(x)]^{\frac{1}{h(x)}}\right]^{h(x).g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}.h(x).g(x)}$.

Exemplo 3.57.

Calcular: **a)** $\lim\limits_{x\to 5}\left[\dfrac{x^2-25}{x-5}\right]^{(x-3)}$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{3x+2}{x-4}\right]^{(x+5)}$.

Solução.

a) Aplicando 1^o caso da *Observação* (3.7), temos: $\lim\limits_{x\to 5}\left[\dfrac{x^2-25}{x-5}\right]^{(x-3)} = 10^2 = 100$.

Portanto $\lim\limits_{x\to 5}\left[\dfrac{x^2-25}{x-5}\right]^{(x-3)} = 100$.

b) Aplicando o segundo caso da *Observação* (3.7), temos:

$$\lim_{x\to +\infty}\left[\frac{3x+2}{x-4}\right] = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty}(x+5) = +\infty$$

Portanto $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{3x+2}{x-4}\right]^{(x+5)} = +\infty$. □

Exemplo 3.58.

Calcular: **a)** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{m^x-n^x}{x}\right]$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a^{mx}-1}{a^{nx}-1}\right]$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{e^{x-1}-a^{x-1}}{x^2-1}\right]$

Solução.

a) Pelo *Exemplo* (3.54), observe que, $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{m^x-n^x}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(m^x-1)-(n^x-1)}{x}\right] =$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{m^x-1}{x} - \frac{n^x-1}{x}\right] = \text{Ln}(m) - \text{Ln}(n) = \text{Ln}(\frac{m}{n})$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{m^x-n^x}{x}\right] = \text{Ln}(\dfrac{m}{n})$.

b) Quando $x \to 0$ então $mx \to 0$ e $nx \to 0$, podemos escrever:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{a^{mx}-1}{a^{nx}-1}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{mx}{nx}\right]\left[\frac{\dfrac{a^{mx}-1}{mx}}{\dfrac{a^{nx}-1}{nx}}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{mx}{nx}\right]\cdot\lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{a^{mx}-1}{mx}}{\frac{a^{nx}-1}{nx}}\right] = \frac{m}{n}\cdot\frac{\text{Ln}(a)}{\text{Ln}(a)} = \frac{m}{n}$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a^{mx}-1}{a^{nx}-1}\right] = \dfrac{m}{n}$.

c) Tem-se: $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{e^{x-1}-a^{x-1}}{x^2-1}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{(e^{x-1}-1)-(a^{x-1}-1)}{x^2-1}\right]=$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{(e^{x-1}-1)-(a^{x-1}-1)}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{e^{x-1}-1}{x^2-1}-\frac{a^{x-1}-1}{x^2-1}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x+1}\right]\cdot\left[\frac{e^{x-1}-1}{x-1}-\frac{a^{x-1}-1}{x-1}\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\left[\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\right]-\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\left[\frac{a^{x-1}-1}{x-1}\right]=$$

Fazendo $y=x-1$ então quando $x\to 1,\ y\to 0$; logo

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\left[\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\right]-\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\left[\frac{a^{x-1}-1}{x-1}\right]=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\left[\frac{e^{y}-1}{y}\right]-\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\left[\frac{a^{y}-1}{y}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}[\text{Ln}(e)-\text{Ln}(a)]=\frac{1}{2}[1-\text{Ln}(a)]$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{e^{x-1}-a^{x-1}}{x^2-1}\right]=\dfrac{1}{2}[1-\text{Ln}(a)].$ □

Aplicações diversas de limites

Exemplo 3.59. -

Calcular: **a)** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\text{sen}a+\text{sen}3x}{\text{sen}a-\text{sen}3x}\right]^{\frac{1}{\text{sen}3x}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{x^3+3x^2+2x-1}{x^3+2x-5}\right]^{x+1}$

Solução.

a) Este limite é do 3^o Caso sa Observação (3.7) , considere $y=\dfrac{1}{\text{sen}3x}$, observe que: $x\to 0,\ (sen3x)\to 0$ e $y\to\infty$. Logo :

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\text{sen}a+\text{sen}3x}{\text{sen}a-\text{sen}3x}\right]^{\frac{1}{\text{sen}3x}}=\lim_{\text{sen}3x\to 0}\left[\frac{\text{sen}a+\text{sen}3x}{\text{sen}a-\text{sen}3x}\right]^{\frac{1}{\text{sen}3x}}=\lim_{\text{sen}3x\to 0}\left[\frac{1+\frac{\text{sen}3x}{\text{sen}a}}{1-\frac{\text{sen}3x}{\text{sen}a}}\right]^{\frac{1}{\text{sen}3x}}$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left[\frac{1+\frac{1}{y\cdot\text{sen}a}}{1-\frac{1}{y\cdot\text{sen}a}}\right]^{y}=\lim_{y\to\infty}\left[\left[\frac{1+\frac{1}{y\cdot\text{sen}a}}{1-\frac{1}{y\cdot\text{sen}a}}\right]^{y\cdot\text{sen}a}\right]^{\frac{1}{\text{sen}a}}=\left[\frac{e^1}{e^{-1}}\right]^{\frac{1}{\text{sen}a}}=e^{\frac{2}{\text{sen}a}}.$$

Outro modo de resolver é considerando $f(x)=\dfrac{\text{sen}a+\text{sen}3x}{\text{sen}a-\text{sen}3x}$ e $g(x)=\frac{1}{\text{sen}3x}$, então $h(x)=f(x)-1=\dfrac{2\text{sen}3x}{\text{sen}a-\text{sen}3x}$ e $\lim\limits_{y\to 0}g(x)=0$.

Do fato $\lim\limits_{y\to 0}.h(x)g(x)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2}{\text{sen}a-\text{sen}3x}=\dfrac{2}{\text{sen}a}$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\text{sen}a+\text{sen}3x}{\text{sen}a-\text{sen}3x}\right]^{\frac{1}{\text{sen}3x}}=e^{\frac{2}{\text{sen}a}}$.

b) Observe, $\dfrac{x^3+3x^2+2x-1}{x^3+2x-5} = \dfrac{x^3+2x-5}{x^3+2x-5} + \dfrac{3x^2+4}{x^3+2x-5} = 1 + \dfrac{3x^2+4}{x^3+2x-5}$, então

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+3x^2+2x-1}{x^3+2x-5}\right]^{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{3x^2+4}{x^3+2x-5}\right]^{x+1}.$$

Sejam $h(x) = \dfrac{3x^2+4}{x^3+2x-5}$ e $g(x) = x+1$ como $\lim\limits_{x\to+\infty} .h(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} .g(x) = \infty$.

Logo pelo 3^o Caso da Observação (3.7) segue que, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3+3x^2+2x-1}{x^3+2x-5}\right]^{x+1} =$ $e^{\lim\limits_{x\to+\infty} .h(x)(x+1)} = e^3$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3+3x^2+2x-1}{x^3+2x-5}\right]^{x+1} = e^3$. □

Exemplo 3.60.

Calcular: **a)** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\text{Ln}\sqrt[5]{\cos 8x}}{5x^2}\right]$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\sqrt{4-3\sqrt{\cos x}}\right]^{\frac{1}{x^2}}$

Solução.

a) Temos: $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\text{Ln}\sqrt[5]{\cos 8x}}{5x^2}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \cdot \dfrac{1}{5x^2} \cdot \text{Ln}\sqrt[5]{\cos 8x} \quad \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\text{Ln}\sqrt[5]{\cos 8x}}{5x^2}\right] == \text{Ln}\left[\lim_{x\to 0}(\sqrt[5]{\cos 8x})^{\frac{1}{5x^2}}\right] = \text{Ln}\left[\lim_{x\to 0}(\cos 8x)^{\dfrac{1}{25x^2}}\right]$$

Aplicando a parte 3^a da Observação (3.7) quando $f(x) = \cos 8x$, observe $f(x) \to 1$.

Seja $h(x) = \cos 8x - 1$ e $g(x) = \dfrac{1}{25x^2}$, pois , $g(x) \to +\infty$ quando $x \to 0$.

Logo $\text{Ln}\left[\lim\limits_{x\to 0} .f(x)^{g(x)}\right] = \text{Ln}\left\{\lim\limits_{x\to 0}\left[[1+\cos 8x]^{\frac{1}{\cos 8x}}\right]^{\frac{\cos 8x}{25x^2}}\right\} = \text{Ln}[e^{-\frac{64}{50}}]$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\text{Ln}\sqrt[5]{\cos 8x}}{5x^2}\right] = -\dfrac{64}{50}$.

b) Sejam $h(x) = 3(1-\sqrt{\cos x})$ e $g(x) = \dfrac{1}{2x^2}$, então $\lim\limits_{x\to 0} h(x).g(x) = \dfrac{3}{8}$ e como $h(x) =$ $(4-3\sqrt{\cos x}) - 1$ sendo $\lim\limits_{x\to 0} .h(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} .g(x) = +\infty$, temos:

$$\lim_{x\to 0}\left[\sqrt{4-3\sqrt{\cos x}}\right]^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left[4-3\sqrt{\cos x}\right]^{\frac{1}{2x^2}} = e^{\frac{3}{8}}$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0}\left[\sqrt{4-3\sqrt{\cos x}}\right]^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{3}{8}}$.

Exemplo 3.61.

Determine o cálculo do limite: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\cdot \text{sen}(n!)}{n^2+2}$.

Solução.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ sabe-se que $-1 \leq \text{sen}n! \leq 1$, como $\dfrac{n}{n^2+2} > 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, então multiplicando a desigualdade do seno temos que $-\dfrac{n}{n^2+2} \leq \dfrac{n\cdot \text{sen}(n!)}{n^2+2} \leq \dfrac{n}{n^2+2}$.

Calculando o limite:

$$-\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+2} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot \text{sen}(n!)}{n^2+2} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+2} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot \text{sen}n!}{n^2+2} \leq 0$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot \text{sen}(n!)}{n^2+2} = 0$.

Exemplo 3.62.

Calcular: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\text{sen}\pi x}{\text{sen}3\pi x}$.

Solução.

Sabe-se que, se $x \to 1 \quad \Rightarrow \quad y = \pi x \to 0$ assim:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\text{sen}\pi x}{\text{sen}3\pi x} = \lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}y}{\text{sen}3y} = \lim_{y\to 0}\frac{y\cdot \text{sen}y}{y\cdot \text{sen}3y} = \lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{\text{sen}y}{y}}{\dfrac{3\cdot \text{sen}3y}{3y}} = \frac{1}{3}$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\text{sen}\pi x}{\text{sen}3\pi x} = \dfrac{1}{3}$

Exemplo 3.63.

Calcular o limite : $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\tan\pi x}{x+2}$.

Solução.

Considere a seguinte mudança de variável: $y = x+2$, então: $\tan\pi x = \tan\pi(y-2) =$

$$= \frac{\tan\pi y - \tan 2\pi}{1+\tan\pi y\cdot\tan 2\pi} = \frac{\tan\pi y - 0}{1+\tan\pi y\cdot 0} = \tan\pi y = \frac{\text{sen}\pi y}{\cos\pi y}$$

No limite: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\tan\pi x}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\text{sen}\pi y}{y\cdot\cos\pi y} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\text{sen}\pi y}{y}\cdot\dfrac{1}{\cos\pi y} =$

Quando $y \to 0$, temos $\pi y \to 0$, logo:

$$\lim_{x\to -2}\frac{\tan\pi x}{x+2} = \lim_{\pi y\to 0}\frac{\text{sen}\pi y}{\pi y}\cdot\lim_{\pi y\to 0}\frac{\pi}{\cos\pi y} = 1\cdot\frac{\pi}{1} = \pi$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\tan\pi x}{x+2} = \pi$.

Exercícios 3-4

1. Verificar o cálculo dos seguintes limites:

1. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+2}{x^2-4} = +\infty$ **2.** $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3} = +\infty$

3. $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x-4} = -\infty$ **4.** $\lim\limits_{x\to 2} \left[\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{3}{x^2-4}\right] = \infty$

5. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x^2-5x-3}{x-1} = -\infty$ **6.** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^3+2x^2-1}{2x^2-3x+5} = -\infty$

7. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x^2-9x-6}{x^2+x-6} = +\infty$ **8.** $\lim\limits_{x\to 20^+} \dfrac{5x^3+1}{20x^3-800x} = +\infty$

9. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[5]{x^6}}{\sqrt[7]{x}-\sqrt[7]{x^4}} = -\infty$ **10.** $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{x^2-2x-1}\right] = +\infty$

2. Calcular os seguintes limites:

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{2x}{3x-2} - \dfrac{x+1}{4x} - \dfrac{x}{6x^2-1}\right]$ **2.** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^5}}{7\sqrt[5]{x}+3\sqrt[5]{x^8}}$

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{6\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[3]{x}}{5\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[4]{x}}$ **4.** $\lim\limits_{x\to -\infty} (x\sqrt{x^2+1}-x^2)$

5. $\lim\limits_{x\to +\infty} 4(x\sqrt{x^2+1}-x^2)$ **6.** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+1}$

7. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x^2-9x-6}{x^2+x-6}$ **8.** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{3x+4x^2-x^3}+x}{x^2+5x+1}$

3. Mostre que, $\lim\limits_{x\to 0^+} .f(x) = \infty$ se, e somente se $\lim\limits_{x\to +\infty} .f(\dfrac{1}{x}) = \infty$.

4. Determine constantes a e b tais que:

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{x^3+1}{x^2+1} + \sqrt{x^2+2} - ax\right] = 0$ **2.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{x^2+1}{x+1} - ax - b\right] = 0$

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\sqrt{x^2-x+1} - ax - b\right] = 0$

5. Quando $x \to 0$ temos $y = \dfrac{1+2x}{x} \to \infty$. Que condições deve cumprir x para que tenhamos a desigualdade $\mid y \mid > 10^4$?

6. Mostre que a função $y = \dfrac{x}{x-3}$ é infinitamente grande quando $x \to 3$. Qual deve ser o valor de x para que a magnitude $\mid y \mid$ seja maior que 1000?

7. Verificar que:

   1. $\text{arcsen}x = \arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ **2.** $\arctan x - \arctan y = \arctan\dfrac{x-y}{1+xy}$.

8. Sejam $f(x) = \text{sen}\dfrac{\pi x}{4} + \cos(\arctan x)$ e $g(x) = \sec(2-x) - \tan(\text{arcsec}(-x))$. Calcular $f(1) - g(2)$.

9. No sentido da *Definição* (3.7):

   1. Demonstrar que: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{(x-3)^2} = +\infty$.

   2. Demonstre que: se $g(x) > \beta > 0$ para todo x, e se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, então $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)} = +\infty$.

10. Um triângulo retângulo isósceles cuja base esta dividida em $2n$ partes (quadrados) tem inscrito uma figura escalonada segundo a *Figura* (3.9). Demonstre que a diferença entre a área do triângulo e a figura escalonada é infinitesimal quando n cresce infinitamente.

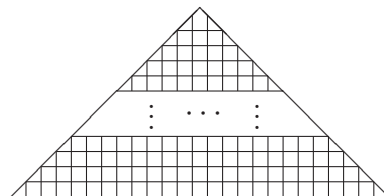



Figura 3.9

11. Para os seguintes exercícios esboçar o gráfico no intervalo $[-2\pi,\ 2\pi]$

   1. $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi \parallel x \parallel}{2}\right)$ **2.** $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

   3. $f(x) = \text{sen}(\pi \parallel x \parallel)$ **4.** $f(x) = \text{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

   5. $f(x) = \mid \text{sen} \mid x \mid\mid$ **6.** $f(x) = \text{sen}2 \mid x \mid$

   7. $f(x) = \text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ **8.** $f(x) = 2\tan\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \text{sen}x$

12. Verificar o cálculo dos seguintes limites:

   1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - \text{sen}x}{x^3} = 0.5$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax - \tan^3 x}{\tan x} = a \qquad a \neq 1$

   3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{1-\cos 4x} = \dfrac{9}{16}$ **4.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \text{sen}ax}{x + \text{sen}bx} = \dfrac{1-a}{1+b} \quad b \neq -1, \quad a \neq 0$

   5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\text{sen}\pi x} = \dfrac{2}{\pi}$ **6.** $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\text{sen}(\pi - x)}{x(\pi - x)} = \dfrac{1}{\pi}$

   7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2} = \dfrac{a^2}{2}$ **8.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{(\frac{\pi}{2} - x)} = 1$

9. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\pi - 3x} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ **10.** $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1} = \frac{\pi^2}{2}$

11. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-x^3}{\text{sen}(1-x^2)} = \frac{3}{2}$ **12.** $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\text{sen}(1-x)}{\sqrt{x}-1} = -2$

13. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}x^2}{\tan x\sqrt{\sec x - 1}} = 2$ **14.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} .4x \cdot \cot 4x = 1$

15. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^6}{(\tan x - \text{sen} x)^2} = 4$ **16.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\pi}{x}. \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}$

17. $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\tan(1+\cos x)}{\cos(\tan x)-1} = -1$ **18.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(\sqrt{x^2+4}-2)}{x^2} = \frac{1}{4}$

19. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\pi - 2\arccos x}{x} = 2$ **20.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{arcsen} 5x}{\arctan x} = 5$

13. Considere um triângulo equilátero de lado a. Suas três alturas servem para gerar um novo triângulo equilátero e assim sucessivamente n vezes. Determine o limite da soma das áreas de todos os triângulos quando $n \to +\infty$.

14. Um círculo de raio r tem inscrito um quadrado; este tem inscrito um círculo o qual tem inscrito um quadrado, e assim sucessivamente n vezes. Determine o limite das soma das áreas de todos os quadrados quando $n \to +\infty$. De modo análogo para a soma das áreas de todos os círculos.

15. Mostre que, se f e g são duas funções definidas em $(a, +\infty)$ e $(b, +\infty)$ respectivamente; se $\displaystyle\lim_{xto+\infty} .f(x) = L$ e $\displaystyle\lim_{xto+\infty} .g(x) = M$ então:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} [C \cdot f(x)] = C \cdot L$ para C constante.

b) $\displaystyle\lim_{xto+\infty} [f(x)+g(x)] = \lim_{xto+\infty} .f(x) + \lim_{xto+\infty} .g(x) = L + M$

c) $\displaystyle\lim_{xto+\infty} [f(x)\times g(x)] = \lim_{xto+\infty} .f(x) \times \lim_{xto+\infty} .g(x) = L \times M$

d) $\displaystyle\lim_{xto+\infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\displaystyle\lim_{xto+\infty} .f(x)}{\displaystyle\lim_{xto+\infty} .g(x)} = \frac{L}{M}$ desde que $M \neq 0$.

16. Calcular os seguintes limites:

1. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\pi - 2x)}$ **2.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x. \tan\left(\frac{a}{x}\right)$ **3.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$ **5.** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\text{sen} x + x}{x}$ **6.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan 3x}{\text{arcsen} 4x}$

7. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$ **8.** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\text{sen} x)^3}{(1+\cos 2x)^3}$ **9.** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 2x}{\text{sen}(x-\frac{\pi}{3})}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^4 - x^4\text{sen}^2 x}}{1-\cos x}$ **11**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{2})}{\sqrt{1-\cos x}}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x.\text{sen}(\text{sen}2x)}{1-\cos(\text{sen}4x)}$ **13**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}(h+x)-\text{sen}h}{x}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{\cos x}-\cos x}{x^2}$ **15**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cot(h+x)-\cot h}{x}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2}{\text{sen}^2 x}-\dfrac{1}{1-\cos x}\right]$ **17**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{(1+\cos ax)(\sec ax)}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(h+x)-\tan h}{x}$ **19**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(h+x)-\cos h}{x}$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec(h+x)-\sec h}{x}$ **21**. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{100\text{sen}3x+200\cos x}{x}$

17. Calcular os seguintes limites:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\text{sen}x}{x}$ **2**. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$ **3**. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\text{sen}x}{x+\cos x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{Ln}\cos x}{x^2}$ **5**. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\text{arcsen}x}{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$ **6**. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[1+\dfrac{1}{x^n}\right]^x$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2[1-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)]$ **8**. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[\text{sen}x]{\cos x}$ **9**. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\text{sen}x}{x}\right)^{\frac{\text{sen}x}{x-\text{sen}x}}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ $a>0$ **11.** $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2})$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x}$ **13.** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos x+\text{sen}x}$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x}{a^x+1}$ $a>0$ **15.** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos x+a\text{sen}bx}$

18. Verificar que $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt[x]{x}=1$.

19. Mostre que se $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, então existe uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ de números reais tais que $f(x_n)>n$.

Miscelânea 3-1

1. Suponha-se que as funções $f(x)$ e $g(x)$ têm a seguinte propriedade:

   "*Para cada* $\varepsilon > 0$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$*; se* $0 <\mid x-2 \mid < \text{sen}^2(\frac{\varepsilon^2}{9})+\varepsilon$, *então* $\mid f(x)-2 \mid < \varepsilon$ *e se* $0 <\mid x-2 \mid < \varepsilon^2$, *então* $\mid g(x)-4 \mid < \varepsilon$."

   Para cada $\varepsilon > 0$ achar um $\delta > 0$ de modo que, para todo $x \in \mathbb{R}$:

   1. Se $0 <\mid x-2 \mid < \delta$, então $\mid f(x)+g(x)-6 \mid < \varepsilon$.

   2. Se $0 <\mid x-2 \mid < \delta$, então $\mid f(x)\cdot g(x)-8 \mid < \varepsilon$.

   3. Se $0 <\mid x-2 \mid < \delta$, então $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{4}\right| < \varepsilon$.

   4. Se $0 <\mid x-2 \mid < \delta$, então $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

2. Mostre que, se $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, então $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

3. Mostre que:

   1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(-x)$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0} f(\mid x \mid) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

   3. $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ **4.** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

4. Seja $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se, } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{se, } x \in \mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

   Mostre que não existe o limite $\lim\limits_{x\to a} .f(x)$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.

5. Seja $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se, } x \in \mathbb{Q} \\ -x, & \text{se, } x \in \mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

   Mostre que não existe o limite , para qualquer $a \neq 0$.

6. Mostre que se $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = L$ e $a \neq 0$, então $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(ax)}{x} = aL$

7. Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(ax+1)^n}{x^n + A}$. Considere separadamente os casos em que n seja: **a)** um inteiro positivo; **b)** um inteiro negativo; **c)** zero.

8. Calcular os seguintes limites:

   1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^{x-2} - e^{2-x}}{\text{sen}(x-2)}$ **2.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan x}{\tan 3x}$ **3.** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{e^{x-3} + e^{3-x} - 2}{1 - \cos(x-3)}$

   4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x - \frac{x^2}{2}}{x^4}$ **5.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \text{sen} x}$ **6.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\text{Ln} x}{x^\alpha}$ $\alpha > 0,\ \alpha \notin \mathbb{N}$

   7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$ $n \in \mathbb{N}$ **8.** $\lim\limits_{x\to 0} \left[\cos\sqrt{\dfrac{15}{x}}\right]^{4x}$ **9.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x}$ $\alpha > 0,\ \alpha \notin \mathbb{N}$

9. Mostre através de um exemplo que se existe uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ de números reais tais que $f(x_n) > n$, então não necessariamente existe o limite de $f(x_n)$ quando $n \to +\infty$.

10. Sejam $f : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções tais que:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)$$

para $c \in (a,\ b)$.

11. Demonstre que, $\lim\limits_{x\to a} .f(x) = L$ se, e somente se $\lim\limits_{x\to a^+} .f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} .f(x) = L$.

12. Um equipamento foi comprado por R$20.000 e espera-se que seu valor final depois de 10 anos de uso seja R1.500. Se o método da linha reta for usado para depreciar o equipamento de R$20.000 a R$1.500 em 10 anos, qual o valor líquido do equipamento depois de 6 anos?. Quando o valor do equipamento é 0 (zero) reais?

Capítulo 4

CONTINUIDADE

Theodor Weierstrass

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass *nasceu em Ostenfeld, no distrito de Münster, Alemanha, no* 31 *de outubro de* 1815, *e faleceu em Berlin, em* 19 *de fevereiro de* 1897.

Com 14 *anos, ingressou ao Instituto Católico de Paderborn. Sua atuação na Escola foi brilhante, conquistando, com regularidade espantosa, todos os prêmios que almejava. Matriculou-se na Escola de Münster, em* 1839, *conhecendo ali Christoph Gudermann* (1798 − 1851), *especialista em funções elípticas. Conta-se que* 13 *alunos compareceram à aula inaugural de Gudermann e que à segunda aula só compareceu Weierstrass.*

Em 1841, *Weierstrass apresentou-se para os exames finais, compostos de uma parte escrita e uma parte oral. Para o exame escrito, três temas foram sugeridos. Um dos problemas era extremamente complicado:* "Determinar desenvolvimentos em série de potências das funções elípticas". *Karl, depois de um ano de trabalhos, conseguiu resolvê-lo, recebendo elogiosas referências de Gudermann. Passando em seguida, pelo exame oral, Weierstrass obteve afinal, seu título de professor, acompanhado de um certificado especial, por* "suas contribuições à matemática."

Em 1842, *Weierstrass foi professor auxiliar de matemática e física no Pro-Gymnasium de Deutsch-Kröne, na Prússia Oriental. Seis anos mais tarde, foi transferido para o instituto de Braunsberg, onde permaneceu de* 1848 *a* 1854. *O catálogo da escola, do ano de* 1848, *contém um trabalho de Weierstrass "Contribuições para a teoria das integrais Abelianas", que certamente há de ter provocado o espanto de seus colegas.*

Foi nomeado professor de matemática da Escola Politécnica de Berlim em julho de 1856.

O estudo da matemática, em moldes mais ou menos intuitivos, sofreu um sério choque no momento em que Weierstrass inventou: "Uma curva contínua que não admitia tangente em qualquer de seus pontos".

Weierstrass deduz o sistema de números reais $\mathbb{R}$ *a partir dos números naturais. Dedekind utiliza os "cortes", entanto que Weierstrass emprega as classes de racionais. As duas teorias estão sujeitas à mesma crítica que os lógicos aplicam às ideias de Cantor. Weierstrass representa uma espécie de síntese do movimento em favor de maior rigor na matemática.*

4.1 Conceitos básicos

Intuitivamente, o gráfico de uma função contínua num intervalo $(a,\ b) \subseteq \mathbb{R}$ pode ser desenhado sem levantar o lápis do papel para esse intervalo $(a,\ b)$. Nas funções descontínuas, este gráfico é interrompido nos pontos de descontinuidade. Decorre disto que uma função é contínua se a pequenas variações de elementos do seu domínio correspondem pequenas variações nas imagens destes elementos. Nos pontos onde a função não é contínua, dizemos que a função é descontínua, ou que se trata de um ponto de descontinuidade.

A continuidade de funções é um dos principais conceitos da topologia[1].

Sejam f e g funções definidas num mesmo intervalo, segundo os gráficos mostrados na *Figura* (4.1).

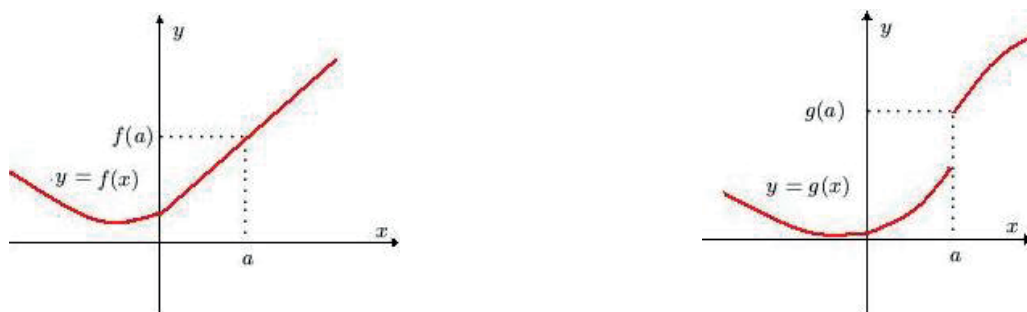



Figura 4.1:

Observe-se que estas funções têm comportamentos distintos no ponto $x = a$.

Entanto o gráfico de f varia continuamente nas proximidades de $x = a$, (não tem furos); o gráfico de g apresenta um salto no ponto de abscissa $x = a$.

A propriedade que tem a função f, de ter o gráfico variando continuamente nas proximidades do ponto $x = a$, pode ser descrita do modo seguinte:

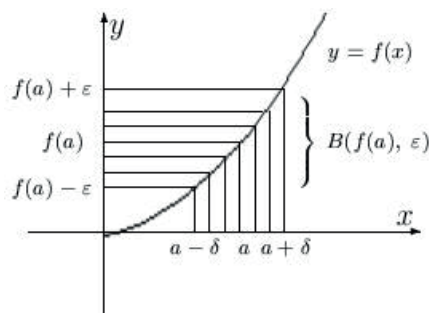
$$\forall \quad \varepsilon > 0, \quad \exists \quad \delta > 0\,/. \quad \forall \quad x \in \text{D}(f)$$

Figura 4.2:

se acontece $\quad a - \delta < x < a + \delta$, então:

$$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon \tag{4.1}$$

Geometricamente, significa que, se x esta próximo de a então $f(x)$ esta próximo de $f(a)$, isto é $\lim\limits_{x \to a} .f(x) = f(a)$ (*Figura* (4.2)).

A expressão (4.1) pode ser escrita do modo seguinte:

[1] A topologia é o ramo da matemática dedicada ao estudo das propriedades dos sólidos que permanecem inalterados por transformações contínuas.

Para todo, $\varepsilon > 0$, $\quad \exists\, \delta > 0/. \quad | x - a | < \delta$ implica $| f(x) - f(a) | < \varepsilon$.
Se a função $f(x)$ cumpre esta condição, dizemos que f é contínua no ponto $x = a$.

Definição 4.1.
Seja $y = f(x)$ função definida no conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, e $a \in A$; diz-se, que f é contínua no ponto $x = a$, se satisfaz as três condições :

i) Existe $f(x)$. **ii)** Existe $\lim\limits_{x \to a} .f(x)$. **iii)** $\lim\limits_{x \to a} .f(x) = f(a)$.

Se alguma das três condições não se cumpre, dizemos que f é descontínua em $x = a$.

Exemplo 4.1.
Determine se a função $f(x)$ é contínua em $x = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} & \text{se,} \quad 0 < x < 5, \quad x \neq 3 \\ \dfrac{3}{2} & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$$

Solução.

i) $f(3) = \dfrac{3}{2}$.

ii) $\lim\limits_{x \to 3} .f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x + 3)(x - 3)}{(x + 1)(x - 3)} = \dfrac{3}{2}$, existe o limite.

iii) $\lim\limits_{x \to 3} .f(x) = \dfrac{3}{2}$.

Portanto, $f(x)$ é contínua em $x = 3$.

Exemplo 4.2.
Suponha que o custo de transporte de taxa postal seja: $R\$0,30$ até 300 gramas, e $R\$1,70$ se o peso for maior que 300 gramas e menor ou igual a 500 gramas. Se x gramas representa o peso de uma carta $(0 < x \leq 500)$, expresse a taxa postal como função de x.
Solução.

Temos $f(x) = 0,30x$ se $0 < x \leq 300$; $f(x) = 1,70x$ se $300 < x \leq 500$; isto é:

$$f(x) = \begin{cases} 0,30x, & \text{se,} \quad 0 < x \leq 300 \\ 1,70x, & \text{se,} \quad 300 < x \leq 500 \end{cases} ;$$

observe que a função não é contínua em $x = 300$.

Exemplo 4.3.

Dada a função: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 1, & se, \quad 1 < x \leq 2 \\ 2x + 6, & se, \quad 2 < x \leq 3 \\ x^3 - 15, & se, \quad 3 < x < 5 \end{cases}$

Determine a continuidade de f *em* $x = 2$ *e* $x = 3$.

Solução.

Para o ponto $x = 2$.

i) $f(2) = -7$ existe.

ii) Para o cálculo de $\lim\limits_{x\to 2} .f(x)$ é necessário calcular os limites laterais.

$$\lim_{x\to 2^-} .f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 - 6x + 1) = -7; \qquad \lim_{x\to 2^+} .f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x + 6) = 10$$

Portanto, não existe $\lim\limits_{x\to 2} .f(x)$; assim, $f(x)$ não é contínua em $x = 2$.

Para o ponto $x = 3$.

i) $f(3) = 12$ existe.

ii) Para o cálculo de $\lim\limits_{x\to 3} .f(x)$ é necessário calcular os limites laterais.

$$\lim_{x\to 3^-} .f(x) = \lim_{x\to 3^-} (2x + 6) = 12; \qquad \lim_{x\to 3^+} .f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x^3 - 15) = 12$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 3} .f(x) = 12$; existe.

iii) $\lim\limits_{x\to 3} .f(x) = 12 = f(3)$.

Observação 4.1.

i) Suponha $f(x)$ descontínua em $x = a$, de modo que existam $f(a) \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x\to a} .f(x)$ porém $\lim\limits_{x\to a} .f(x) \neq f(a)$, então diz-se que a descontinuidade é *evitável* ou *removível*; pois podemos redefinir a função $f(x)$ de modo que $\lim\limits_{x\to a} .f(x) = f(a)$, isto é a função f redefinida resulta ser contínua em $x = a$.

ii) Se a descontinuidade em $x = a$ não é evitável ou removível, chama-se descontinuidade *essencial*; este caso ocorre quando $\lim\limits_{x\to a} .f(x)$ não existe ou não é finito.

Exemplo 4.4.

Determine os pontos de descontinuidade da função: $f(x) = \dfrac{6x + 24}{x^2 + 3x - 4}$.

Solução.

Observe que $x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$. O denominador da função é zero quando $x = -4$ ou $x = 1$, esses são os possíveis pontos de descontinuidade, pois f não esta definida nesses pontos e os limites respectivos são: $\lim\limits_{x\to -4} .f(x) = -\dfrac{6}{5}$ e $\lim\limits_{x\to 1} .f(x) = \infty$.

A descontinuidade em $x = 1$ é essencial e no ponto $x = -4$ é evitável; para os demais valores de x a função é contínua.

Podemos redefinir a função $f(x)$ assim: $g(x) = \begin{cases} \dfrac{6x+24}{x^2+3x-4} & \text{se,} \quad x \neq -4 \\ -\dfrac{6}{5} & \text{se,} \quad x = -4 \end{cases}$

Observe que $g(x)$ é contínua em $x = -4$, entanto a descontinuidade em $x = 1$ é essencial.

Para algumas demonstrações de propriedades de funções contínuas, algumas vezes é útil a seguinte definição, equivalente à *Definição* (4.1).

Definição 4.2.
Seja $y = f(x)$ *função definida no conjunto* $A \subseteq \mathbb{R}$, *e* $a \in A$; *diz-se, que* f *é contínua no ponto* $x = a$, *se:*
Dado $\varepsilon > 0, \quad \exists \quad \delta > 0/. \quad x \in B(a, \delta)$, *então* $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$; *ou*
Dado $\varepsilon > 0, \quad \exists \quad \delta > 0/. \quad |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Definição 4.3. *Continuidade num conjunto*
Uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, *diz-se que é contínua no conjunto* $B \subseteq A$ *se, e somente se é contínua em* $x = a, \quad \forall\, a \in B$.

Exemplo 4.5.

Mostre que a função constante é contínua em todo seu domínio.

Solução.

Sejam $k \in \mathbb{R}$ uma constante, e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = k \quad \forall\, x \in A$, então $f(a) = k \quad \forall\, a \in A$. Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, pois

$$| f(x) - f(a) | = | k - k | = | (x-a) + (a-x) | \leq 2 \mid x - a \mid < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

Portanto, sendo $x = a$ um elemento arbitrário, $f(x) = k$ é contínua no conjunto A.

Exemplo 4.6.

Mostre que a função $f(x) = x^2$ *é contínua em todo seu domínio.*

Solução.

Seja $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \quad \forall\, x \in A$, então $f(a) = a^2$ para $x = a$, onde $a \in A$; assim dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$| f(x) - f(a) | = | x^2 - a^2 | = | x - a | \cdot | x + a | < | x - a | (| x | + | a |) \tag{4.2}$$

Se $a = 0$ a desigualdade é imediata.

Por outro lado seja $a \neq 0$, quando $| x - a | < \delta$ e da propriedade $|| x | - | a || < | x - a | < \delta$ segue-se que $| x | < \delta + | a |$, considere um $\delta_1 = \dfrac{| a |}{2}$, então temos $| x | <$

$$< \frac{| a |}{2} + | a | = \frac{3 \, | a |}{2} \tag{4.3}$$

De (4.2) e (4.3) segue que:

$$| f(x) - f(a) | < | x - a | (| x | + | a |) < | x - a | . (\frac{3 \, | a |}{2} + | a |) < \frac{5 \, | a |}{2} \, | x - a | < \varepsilon$$

Considerando $\delta = \min .\{\dfrac{| a |}{2}, \; \dfrac{2\varepsilon}{5 \, | a |}\}$ temos, para todo $\varepsilon > 0$ cumpre-se $| f(x) - f(a) | < \varepsilon$ sempre que $| x - a | < \delta$.

Propriedade 4.1.

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções reais e contínuas em $x = a$ e k uma constante real, então:

i) *$k \cdot f(x)$ é contínua em $x = a$.* **ii)** *$(f \pm g)(x)$ é contínua em $x = a$.*

iii) *$(f \cdot g)(x)$ é contínua em $x = a$.* **iv)** *$| f | (x)$ é contínua em $x = a$.*

v) *$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ é contínua em $x = a$, desde que $g(a) \neq 0$.*

Demonstração.(ii)

Da continuidade de $f(x)$ e $g(x)$ temos $\lim\limits_{x \to a} .f(x) = f(a)$ e $\lim\limits_{x \to a} .g(x) = g(a)$ da definição da função $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ e da propriedade de limite da soma, segue-se que:

$$\lim_{x \to a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} .f(x) \pm \lim_{x \to a} .g(x) = f(a) \pm g(a) = (f \pm g)(a)$$

Portanto a função $(f \pm g)(x)$ é contínua em $x = a$. □

As outras propriedades mostram-se aplicando propriedades de limite, é exercício para o leitor.

Observação 4.2.

A recíproca da Propriedade (4.1) *não necessariamente é verdadeira como se mostra no seguinte exemplo.*

Exemplo 4.7.

As funções reais $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ definidas por: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se,} \quad x \leq 0 \\ 1, & \text{se,} \quad x > 0 \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se,} \quad x \leq 0 \\ 0, & \text{se,} \quad x > 0 \end{cases} \qquad\qquad h(x) = \begin{cases} -1, & \text{se,} \quad x \leq 0 \\ 1, & \text{se,} \quad x > 0 \end{cases}$$

não são contínuas em $x = 0$.

Porém, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $f(x) + g(x) = 1$, $f(x) \cdot g(x) = 0$ e $\mid h(x) \mid = 1$,assim, estas três últimas funções são contínuas em todo $\mathbb{R}$.

Propriedade 4.2.

i) *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função polinômica, isto é* $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, $\quad a_0 \neq 0$ *então* $f(x)$ *é contínua* $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

ii) *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função racional, isto é:*

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}$$

então $f(x)$ *é contínua no conjunto:*

$$\{\, x \in \mathbb{R}/. \quad b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \cdots + b_{m-1}x + b_m \neq 0 \,\}$$

A demonstração desta propriedade é exercício para o leitor.

Exemplo 4.8.

Determinar os valores de x, *para os quais as funções dadas sejam contínuas:*

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 9}$ **b)** $g(x) = \mid x^2 - 16 \mid$ **c)** $h(x) = x^5(x + 3)^7$

Solução.

(a) Temos $f(x)$ é função racional e seu domínio é $\mathrm{D}(f) = \{\, x \in \mathbb{R}/. \quad x \neq \pm 3 \,\}$; logo ela é contínua em $\mathrm{D}(f)$.

(b) A *Propriedade* (4.1)- ***v***), garante que $g(x) = \mid x^2 - 16 \mid$ seja contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) A função $h(x) = x^5(x + 3)^7$ é polinômica, então ela é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

Propriedade 4.3.

Considere $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções reais tais que* $Im(f) \subseteq B$, *sendo* f *contínua em* $x = a$ *e* g *contínua em* $y = f(a)$, *então* $g \circ f$ *é contínua em* $x = a$.

Demonstração.

A mostrar que dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ /. $\mid g(f(x)) - g(f(a)) \mid < \varepsilon$ sempre que $\mid x - a \mid < \delta$.

Com efeito, do fato g contínua em $f(a) = b$ temos, dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta_1 > 0$/. se $y \in B$, $\mid g(y) - g(b) \mid < \varepsilon$ sempre que:

$$\mid y - b \mid < \delta_1 \tag{4.4}$$

Por outro lado, f é contínua em $x = a$, então dado $\varepsilon_1 > 0$, em particular podemos considerar $\varepsilon_1 = \delta_1$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in A$, $\mid f(x) - f(a) \mid < \delta_1$ sempre que

$$\mid x - a \mid < \delta \tag{4.5}$$

Do fato $\text{Im}(f) \subseteq B$ podemos efetuar a composição entre as funções g e f para obter $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$ e $y = f(x)$; então de (4.4) e (4.5) obtém-se que, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ /. se $x \in A$, $\mid g(y) - g(b) \mid = \mid g(f(x)) - g(f(a)) \mid < \varepsilon$ sempre que $\mid y - b \mid = \mid f(x) - f(a) \mid < \delta_1$ sempre que $\mid x - a \mid < \delta$.

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$/. se $x \in A$, $\mid g(f(x)) - g(f(a)) \mid < \varepsilon$ sempre que $\mid x - a \mid < \delta$. $\square$

Propriedade 4.4.

Sejam $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções reais tais que* $\text{Im}(f) \subseteq B$ *e:*

i) $\lim\limits_{x \to a} .f(x) = b$ **ii)** *g contínua em $y = b$.*

então $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim\limits_{x \to a} .f(x)) = g(b)$

Demonstração.

Definimos $h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se,} \quad x \neq a \\ 0, & \text{se,} \quad x = a \end{cases}$

da hipótese **i)** temos h é contínua em $x = a$; pela *Propriedade* (4.3) a função *goh* é contínua em $x = a$, isto é: $\lim\limits_{x \to a}(g \circ f)(x) = (g \circ h)(a) = g(h(a)) = g(b) = g(\lim\limits_{x \to a} \cdot f(x))$.

Por outro lado, as funções f e h são diferentes somente no ponto $x = a$, então $\lim\limits_{x \to a}(g \circ h)(x) = \lim\limits_{x \to a}(g \circ f)(x)$.

Portanto, $\lim\limits_{x \to a}(g \circ f)(x) = \lim\limits_{x \to a} \cdot g(f(x)) = g(\lim\limits_{x \to a} \cdot f(x))$. $\square$

Exercícios 4-1

1. Mostre utilizando ε e δ que cada uma das seguintes funções é contínua no ponto indicado.

   1. $f(x) = -5x + 6, \quad a = -2$ **2**. $f(x) = 3x^2 + 5, \quad a = 3$

   3. $f(x) = x^4, \quad a = 1$ **4**. $f(x) = x^2 + 5x + 6, \quad a = -1$

2. Suponha que exista uma vizinhança $B(a,\ r)$ e um número real $M > 0$ tal que cumpre a condição: $\mid f(x) - f(a) \mid \leq M \mid x - a \mid, \quad \forall\, x \in B(a,\ r)$. Mostre que f é contínua em $x = a$.

3. Mostre que se $\lim\limits_{x \to a} . f(x) = L > 0$, então $\lim\limits_{x \to a} . \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$.

4. Mostre que $f(x) = [|x|]$ é contínua em todo $x = a$ onde $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

5. Usando o princípio de indução, mostre que se: $f_i \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ n$ são funções contínuas em $x = a$, então:

   1. $f_1 + f_2 + f_3 + \ \cdots\ + f_n$ é contínua em $x = a$.

   2. $f_1 \times f_2 \times f_3 \times \ \cdots\ \times f_n$ é contínua em $x = a$.

6. Para cada uma das seguintes funções. Determine se ela é contínua nos pontos indicados.

   1. $f(x) = \begin{cases} 3x - 3 & \text{se}, \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{se}, \quad x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

   2. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se}, \quad x \geq -1 \\ 1- \mid x \mid & \text{se}, \quad x < -1 \end{cases} \qquad a = -1$

   3. $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se}, \quad x < 1 \\ 1- \mid x \mid & \text{se}, \quad x > 1 \\ 1 & \text{se}, \quad x = 1 \end{cases} \qquad a = 1, \quad a = -1$

   4. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se}, \quad -2 \leq x \leq -1 \\ 1 & \text{se}, \quad -1 < x < 1 \\ 2 - x & \text{se}, \quad 1 \leq x \end{cases} \qquad a = 1, \quad a = -1$

   5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{\mid x^2 - 4 \mid} & \text{se}, \quad x \neq \pm 2 \\ \dfrac{4}{3} & \text{se}, \quad x = \pm 2 \end{cases} \qquad a = 2,\ a = -2$

6. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se,} \quad -3 \leq x \leq 0 \\ x-1 & \text{se,} \quad 0 < x < 2 \\ 5-x^2 & \text{se,} \quad 2 \leq x \end{cases} \qquad a = 0 \quad a = 2$

7. Dar exemplo de uma função f definida em $\mathbb{R}$ que não seja contínua em nenhum ponto $x \in \mathbb{R}$, porém que, $| f(x) |$ seja contínua em todo $\mathbb{R}$.

8. Para os seguintes exercícios, determine se é possível determinar um número L para que a função f seja contínua no ponto $x = a$. No caso afirmativo determine L, caso contrário justificar sua resposta.

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x-4}{x-4} & \text{se,} \quad x \neq 4 \\ L & \text{se,} \quad x = 4 \end{cases} \qquad a = 4.$

2. $f(x) = \begin{cases} | x | & \text{se,} \quad x > 0 \\ 1-x^2 & \text{se,} \quad x < 0 \\ L & \text{se,} \quad x = 0 \end{cases} \qquad a = 0.$

3. $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{se,} \quad | x |< 1 \\ | x | -1 & \text{se,} \quad | x |> 1 \\ L & \text{se,} \quad | x |= 1 \end{cases} \qquad a = \pm 1.$

4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}, & \text{se,} \quad x \neq 4 \\ L & \text{se,} \quad x = 4 \end{cases} \qquad a = 4.$

5. $f(x) = \begin{cases} | x | -2 & \text{se,} \quad | x |< 2 \\ 4-x^2 & \text{se,} \quad | x |> 2 \\ L & \text{se,} \quad | x |= 2 \end{cases} \qquad a = 2, \quad a = -2.$

6. $f(x) = \begin{cases} Sgn(9-x^2) & \text{se,} \quad | x |> 4 \\ | x^2-16 | -1 & \text{se,} \quad | x |< 4 \\ L & \text{se,} \quad | x |= 4 \end{cases} \qquad a = 4.$

7. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{| x^2-2x-3 |}{x-3}, & \text{se,} \quad x \neq 3 \\ L, & \text{se,} \quad x = 3 \end{cases} \qquad a = 3.$

8. $f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & \text{se,} \quad | x |< 2 \\ L & \text{se,} \quad | x |> 2 \end{cases} \qquad a = 2, \quad a = -2.$

9. Determine o conjunto de pontos de continuidade da função $y = f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se,} \quad x < 0 \\ x & \text{se,} \quad 0 \leq x < 1 \\ -x^2+4x-2 & \text{se,} \quad 1 \leq x < 3 \\ 4-x & \text{se,} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

10. Estude a continuidade da função $f(x) = \dfrac{1}{2 + 2^{\tan x}}$ no ponto $x = \dfrac{\pi}{2}$.

11. Estude a continuidade da função $g(x) = \dfrac{\text{sen}(\frac{1}{x})}{1 + \sqrt[x]{e}}$ no ponto $x = 0$.

12. Para todo número real $x = a$, achar uma função que seja contínua em no ponto $x = a$, porém que não seja contínua em nenhum outro ponto.

13. Suponha $f(x)$ cumpre $f(x+y) = f(x) + f(y)$, e que f seja contínua em $x = 0$. Mostre que f é contínua em $x = a \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$.

14. Determine uma função definida em todo $\mathbb{R}$ que seja descontínua em $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots$ e que seja contínua nos demais pontos.

15. **1.** Suponha f é uma função que cumpre $\mid f(x) \mid \geq \mid x \mid \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$. Demonstrar que f é contínua em $x = 0$ (lembre que $f(0)$ tem que ser 0).

    2. Dar um exemplo de uma função f que não seja contínua em nenhum $x = a$.

    3. Suponha-se que g seja contínua em $x = 0$, $\quad g(0) = 0$ e $\mid f(x) \mid \leq \mid g(x) \mid \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é contínua em $x = 0$.

16. Os raios de três cilindros superpostos medem 3, 2 e 1 metros respectivamente. As alturas de cada um dos cilindros é $5m$. Expressar a área da seção transversal do corpo gerado como função da distância que relaciona a seção e a base inferior do cilindro que ocupa a parte baixa do corpo. Será esta função contínua? Construir o gráfico.

17. Como devemos eleger o número α para que a função $f(x)$ seja contínua em $\mathbb{R}$? Construir seu gráfico. $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se,} \quad x \leq 1 \\ \alpha, & \text{se,} \quad x > 1 \end{cases}$.

18. Determine os números A e B de modo que a função $g(x)$ seja contínua no conjunto de números reais $\mathbb{R}$.

$$g(x) = \begin{cases} -2\text{sen}x & \text{se,} \quad x \leq -\dfrac{\pi}{2} \\ A\text{sen}x + B & \text{se,} \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{se,} \quad x \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

19. Determine o valor de a de modo que a função $g(x)$ seja contínua em toda a reta real. $g(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se,} \quad x \leq 3 \\ ax+7 & \text{se,} \quad x > 3 \end{cases}$

20. Determine os valores de b e c de modo que a função $f(x)$ seja contínua em toda a reta real. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se,} \quad 1 < x < 3 \\ x^2 + bx + c & \text{se,} \quad \mid x - 2 \mid \geq 1 \end{cases}$

21. Se $\lim\limits_{x \to a} .f(x)$ existe, porém é diferente de $f(a)$, dizemos que f tem descontinuidade evitável em $x = a$.

    1. Se $f(x) = \text{sen}\dfrac{1}{x}$ para $x \neq 0$. A função f tem descontinuidade evitável em $x = 0$? Que acontece se $f(x) = x \cdot \text{sen}\dfrac{1}{x}$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 1$?

    2. Suponha que g tenha descontinuidade evitável em $x = a$. Seja $h(x) = g(x)$ para $x \neq a$ e seja $h(a) = \lim\limits_{x \to a} .g(x)$. Mostre que h é contínua em $x = a$.

    3. Seja $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{Q}$, e $f(\dfrac{p}{q}) = \dfrac{1}{q}$ se $\dfrac{p}{q}$ é uma fração irredutível. Qual é a função g definida por $g(x) = \lim\limits_{y \to x} .f(y)$

22. Numa comunidade de 8.000 pessoas, a razão segundo a qual um boato se espalha é conjuntamente proporcional ao número de pessoas que ouviram o boato e ao número de pessoas que não o ouviram.

    1. Se o boato está se espalhando a uma razão de 20 pessoas por hora quando 200 pessoas o ouviram, expresse a taxa segundo o qual o boato esta se espalhando como função do número de pessoas que o ouviram.

    2. Quão rápido o boato está se espalhando quando 500 pessoas o ouviram?

23. Uma determinada lagoa pode suportar um máximo de 14.000 peixes, e a taxa de crescimento deles é conjuntamente proporcional ao número presente e à diferença entre 14.000 e a quantidade existente. **a)** Se $f(x)$ peixes por dia for a taxa de crescimento quando houver x peixes, escreva uma função que defina $f(x)$. **b)** Mostre que $f(x)$ é contínua em todo seu domínio.

4.2 Continuidade em intervalos

Definição 4.4.
Uma função $f:(a,\ b)\longrightarrow\mathbb{R}$ *é contínua no intervalo* $(a,\ b)$ *, se é contínua em todo* $x\in(a,\ b)$.

Exemplo 4.9.

As funções polinomiais, trigonométricas: seno e coseno, as exponenciais e os logaritmos são funções contínuas em seus respectivos domínios de definição.

A parábola, como função polinômica, é um exemplo de função contínua em todo seu domínio $\mathbb{R}$.

Definição 4.5.

a) *Uma função* $f:(a,\ b)\longrightarrow\mathbb{R}$ *é contínua pela direita de* $x=a$*, se* $\lim\limits_{x\to a^+}.f(x)=f(a)$.

b) *Uma função* $f:(a,\ b)\longrightarrow\mathbb{R}$ *é contínua pela esquerda* $x=b$*, se* $\lim\limits_{x\to b^-}.f(x)=f(b)$.

Definição 4.6.
Uma função $f:(a,\ b]\longrightarrow\mathbb{R}$ *é contínua no intervalo* $(a,\ b]$*, se cumpre as duas condições:*

1^a f é contínua em $(a,\ b)$.

2^a f é contínua pela esquerda em $x=b$.

Definição 4.7.
Uma função $f:[a,\ b)\longrightarrow\mathbb{R}$ *é contínua no intervalo* $[a,\ b)$*, se cumpre as duas condições:*

1^a f é contínua em $(a,\ b)$.

2^a f é contínua pela direita em $x=a$.

Definições análogas podemos obter para a continuidade de funções em intervalos da forma $(-\infty,\ b]$ e $[a,\ +\infty)$

Definição 4.8.

Uma função $f : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua no intervalo $[a,\ b]$, se cumpre as três condições:

1^a f é contínua em $(a,\ b)$.

2^a f é contínua pela direita em $x = a$.

3^a f é contínua pela esquerda em $x = b$.

Exemplo 4.10.

Seja $f(x) = [|x|]$, $x \in \mathbb{R}$, mostre que f é contínua pela direita em todo $n \in \mathbb{Z}$ e que não existe $\lim\limits_{x \to n} .f(x)$.

Solução.

Pela definição de $f(x) = [|x|]$, temos $x \in [n,\ n+1)$, então $[|x|] = n$ logo $\lim\limits_{x \to n^+} .f(x) = \lim\limits_{x \to n^+} [|x|] = \lim\limits_{x \to n^+} n = n = f(n)$ assim, f é contínua pela direita de $x = n$.

Por outro lado, para todo $x \in [n-1,\ n)$ temos $f(x) = [|x|] = n-1$, logo $\lim\limits_{x \to n^-} .f(x) = \lim\limits_{x \to n^-} [|x|] = \lim\limits_{x\ ton^-} (n-1) = n-1$.

Como os limites laterais são distintos então não existe $\lim\limits_{x \to n} .f(x)$.

Exemplo 4.11.

Um fabricante pode obter um lucro de R\$30,00 *em cada item se não mais de* 1.000 *itens forem produzidos por semana. O lucro em cada item baixa* R\$0,30 *para todo item acima de* 1.000. **a)** *Se x itens forem produzidos por semana, expresse o lucro semanal do fabricante como função de x. Suponha lucro não negativo.* **b)** *Mostre que a função da parte a) é contínua em $x = 1.000$; portanto contínua em todo seu domínio.*

Solução.

Seja $L(x)$ o lucro semanal a cada x itens produzidos, então temos $L(x) = 20x$ se $0 \leq x < 1000$ e $L(x) = (20 - 0,30)x$ se $0 \leq x < 1.000$.

Logo $L(x) = \begin{cases} 30x, & \text{se}, \quad 0 \leq x < 1.000 \\ 29,7x, & \text{se}, \quad x \geq 1.000 \end{cases}$.

Portanto a função não é contínua em $x = 1.000$.

Exemplo 4.12.

Determine os intervalos de continuidade da função: $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-9}{25-x^2}}$.

Solução.

O domínio da função são todos os números reais para os quais a raiz quadrada de $\dfrac{x^2-9}{25-x^2}$ seja um número real, resolvendo $\dfrac{x^2-9}{25-x^2} \geq 0$ segue que o domínio

$$D(f) = \{\, x \in \mathbb{R} \,/. \quad x \in (-5,\ -3] \cup [3,\ 5)\, \}$$

Estudo da continuidade no intervalo $(-5,\ -3]$.

i) f é contínua no intervalo $(-5,\ -3)$.

ii) $\lim\limits_{x\to -3^-} .f(x) = 0 = f(-3)$.

Portanto , f é contínua no intervalo $(-5,\ -3]$.

Estudo da continuidade no intervalo $[3,\ 5)$.

i) f é contínua no intervalo $(3,\ 5)$.

ii) $\lim\limits_{x\to 3^+} .f(x) = 0 = f(3)$.

Portanto, f é contínua em $[3,\ 5)$

4.2.1 Funções contínuas em intervalos fechados

Propriedade 4.5.

Considere $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *função contínua e seja* x_n *uma sequência de números reais tais que* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, *então* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$.

Demonstração.

Da definição de limites ao infinitos temos, se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$; então dado $\varepsilon_1 > 0$, existe $N > 0$ tal que $|\ x_n - x\ | < \varepsilon_1$ sempre que $N > n$.

Sendo f contínua em $\mathbb{R}$ em particular no número $x_n \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{x_n\to x} f(x_n) = f(x)$ desta definição temos, $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0$ tal que $|\ f(x_n) - f(x)\ | < \varepsilon$ sempre que $|\ x_n - x\ | < \delta$.

Fazendo $\delta = \varepsilon_1, \quad \forall\, \varepsilon > 0, \quad N > 0$ e $\exists \delta > 0$ tal que $|\ f(x_n) - f(x)\ | < \varepsilon$ sempre que $|\ x_n - x\ | < \delta$ quando $N > n$.

Isto é $\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, N > 0$ tal que $|\ f(x_n) - f(x)\ | < \varepsilon_1$ sempre que $N > n$.

Portanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$. □

Teorema 4.1. *Teorema de Bolzano.*

Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *é uma função contínua em* $[a,\ b]$ *e* $f(a) \cdot f(b) < 0$, *então existe pelo menos um ponto* $c \in (a,\ b)$ *tal que* $f(c) = 0$.

Demonstração.

Da hipótese $f(a) \cdot f(b) < 0$ então $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários. Suponhamos que $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$.

Seja $m = \dfrac{a+b}{2}$, se $f(m) = 0$, esta propriedade está mostrada.

Suponhamos $f(m) \neq 0$, então existe um intervalo $[a_1, \ b_1] \subset [a, \ b]$ com $a_1 = m$ ou $b_1 = m$, tal que $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$.

Seja $m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$, se $f(m_1) = 0$, esta propriedade esta mostrada. Após de repetir este processo um número n de vezes; temos que existe um intervalo $[a_n, \ b_n] \subset [a, \ b]$ tal que $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$; a distância entre os pontos a_n e b_n é $\dfrac{b-a}{2n}$.

Após reiteradas vezes este processo, construímos uma sequência não decrescente $a \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq \cdots$, limitada superiormente; seja $\lim\limits_{n \to +\infty} .a_n = c_1$.

De modo análogo construímos uma sequência não crescente limitada inferiormente $b \geq b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq b_4 \geq \cdots$; seja $\lim\limits_{n \to +\infty} .b_n = c_2$.

Por outro lado, $\lim\limits_{n \to +\infty} [b_n - a_n] = \lim\limits_{n \to +\infty} \left[\dfrac{b-a}{2n} \right] = 0$ então $\lim\limits_{n \to +\infty} .b_n = \lim\limits_{n \to +\infty} .a_n = c_2 = c_1 = c$.

Como $f(x)$ é contínua em $x = c$, temos $\lim\limits_{x \to c} .f(x) = f(c)$.

Pela *Propriedade* (4.5) sabe-se que se uma sequência $\{x_n\}$ tem limite c, então a sequência $f(x_n)$ tem limite $f(c)$; então $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = f(c) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(b_n)$.

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$ a desigualdade $f(a_n) < 0$ implica $f(c) \leq 0$ e $f(b_n) > 0$, implica $f(c) \geq 0$.

Portanto, existe pelo menos um ponto $c \in (a, \ b)$ tal que $f(c) = 0$. □

Observe a interpretação geométrica deste teorema:

> "*O gráfico de uma função contínua que une os pontos* $P(a, f(a))$ *e* $Q(b, f(b))$ *onde* $f(a)$ *e* $f(b)$ *são de sinais contrários, corta o eixo-*x *em pelo menos um ponto*". (*Figura* (4.3)).

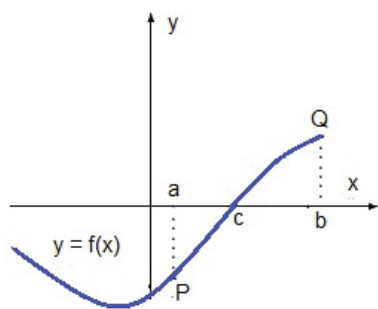



Figura 4.3:

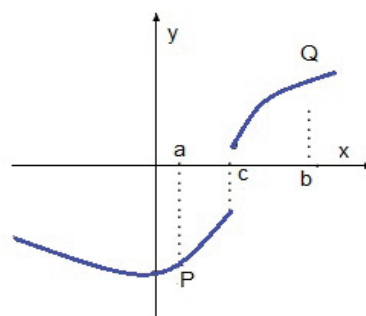



Figura 4.4:

A condição de ser f contínua em $[a,\ b]$ é necessária; a *Figura* (4.4) mostra que se f é descontínua em $[a,\ b]$ a propriedade nem sempre verifica-se.

Exemplo 4.13.

Mostre que, se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua e cumpre:*

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = K > 0$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = N < 0$

Então existe $x_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x_0) = x_0$.

Demonstração.

Da hipótese **i)** temos que $\forall\, \varepsilon_1 > 0, \quad \exists\, M_1 > 0$ (suficientemente grande) tal que, se $x > M_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - K| < \varepsilon_1$; logo $x > M_1 \quad \Rightarrow \quad K - \varepsilon_1 < f(x) < K + \varepsilon_1$.

Como trata-se de qualquer $\varepsilon_1 > 0$, podemos considerar por exemplo $\varepsilon_1 = 10^{-100}$, assim, se $x > M_1 \quad \Rightarrow \quad K - 10^{-100} < f(x) < K + 10^{-100}$.

A definição de limite ao infinito garante ainda a existência de um $M_1' > K + 10^{-100}$ tal que $x_2 > M_1'$ para algum $x_2 \in \mathbb{R}$.

Logo, se $x_2 > M_1' \quad \Rightarrow \quad f(x_2) < K + 10^{-100} < M_1' < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) < x_2$.

De modo análogo.

Da hipótese **ii)** temos que $\forall\, \varepsilon_2 > 0, \quad \exists\, M_2 < 0$ (suficientemente pequeno) tal que, se $x < M_2 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - N| < \varepsilon_2$; logo $x < M_2 \quad \Rightarrow \quad N - \varepsilon_2 < f(x) < N + \varepsilon_2$.

Em particular, podemos considerar $\varepsilon_2 = 10^{-100}$, assim, se $x < M_2 \quad \Rightarrow \quad N - 10^{-100} < f(x) < N + 10^{-100}$. A definição de limite a menos infinito garante a existência de um $M_2' < N - 10^{-100}$ tal que $x_1 < M_2'$ para algum $x_1 \in \mathbb{R}$.

Logo, se $x_1 < M_2' \quad \Rightarrow \quad x_1 < M_2' < N - 10^{-100} < f(x_1) \quad \Rightarrow \quad x_1 < f(x_1)$.

Consideremos a função $g : [x_1,\ x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - x$, logo como f é contínua, temos que g é contínua em $[x_1, x_2]$, ainda mais, temos que $g(x_1) = f(x_1) - x_1 > 0$ e $g(x_2) = f(x_2) - x_2 < 0$.

O Teorema de Bolzano garante a existência de $x_0 \in [x_1,\ x_2]$ tal que $g(x_0) = 0 \quad \Rightarrow$ $f(x_0) = x_0$.

Portanto, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = x_0$. □

Propriedade 4.6. *Da limitação global.*

Se f *é contínua em* $[a,\ b]$, *então* f *é limitada em* $[a,\ b]$.

Demonstração.

Consideremos o conjunto $A = \{\ x \in [a,\ b]\ /.\ f \quad \text{é limitada}\ \}$, observe que $A \neq \emptyset$ pois sendo f contínua em a pela propriedade da limitação local, existe $M > 0$ e $\delta > 0$ tal que $|\ f(x)\ | < M, \quad x \in [a,\ a + \delta]$ isto é $a + \delta \in A$.

Inversamente

Como A é limitado admite supremo. Seja $c = \sup.A$, evidentemente $c \leq b$. Suponhamos que $c < b$, então pela propriedade da limitação local, $\exists\ M_1 > 0$ e $\delta_1 > 0$ tal que $|\ f(x)\ | < M_1, \forall\ x \in [c - \delta_1,\ c + \delta_1]$. Como f é limitada em $[a,\ c - \delta_1]$ para algum $M_2 > 0$, considerando $M_3 = \max.\{M_1,\ M_2\}$ temos $|\ f(x)\ | < M_3, \quad \forall\ x \in [a,\ c + \delta_1]$ onde $c + \delta_1 \in A$ o qual contradiz o fato de que $c = \sup.A$; portanto c não é estritamente menor que b. Como $c \leq b$ segue-se que $c = b$.

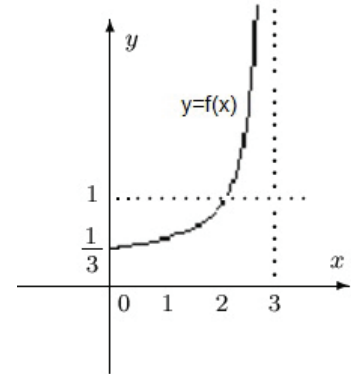
Pelo um raciocínio análogo, como f é contínua em b, ela é limitada em $[b - \delta_2,\ b]$ para algum $\delta_2 > 0$ e sendo limitado em $[a, b - \delta_2]$ (isto pelo anterior) segue-se que f é limitada em $[a,\ b]$.

No seguinte exemplo mostra-se que se f não é contínua em $[a,\ b]$ a função não necessariamente é limitada. □

Figura 4.5:

Exemplo 4.14.

Seja

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3-x}, & \text{se}, \quad 0 \leq x < 3 \\ 1, & \text{se}, \quad x = 3 \end{cases}$$

A *Figura* (4.5) mostra o gráfico da função f, observe que f não é limitada.

Teorema 4.2. *Teorema de Weierstrass.*

Se f é contínua em $[a, b]$, então ela possui um ponto de mínimo e um ponto de máximo em $[a,\ b]$; isto é, existem $x_1,\ x_2 \in [a,\ b]$ tais que:

$m = f(x_1) = \min.\{\ f(x)\ /.\ x \in [a,\ b]\ \}$.

$M = f(x_2) = \max.\{\ f(x)\ /.\ x \in [a,\ b]\ \}$*; ou,* $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall\ x \in [a,\ b]$.

Demonstração.

Como f é contínua em $[a,\ b]$, pela *Propriedade* (4.6), o conjunto $A = \{\ f(x)\ /.\ x \in [a,\ b]\ \}$ é limitado não vazio; então A admite um supremo M e um ínfimo m ; isto é $m \leq f(x) \leq M \quad \forall\ x \in [a,\ b]$. A mostrar que existe $x_1 \in [a,\ b]$ tal que $f(x_1) = m$ isto é $m = \min.A$.

Suponhamos (pelo absurdo) que $\forall\ x \in [a,\ b]$ temos $f(x) > m$ ou $f(x) - m > 0$.

A função $g : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{1}{f(x) - m}$ é contínua do fato ser o quociente de duas funções contínuas com denominador distinto de zero. Pela *Propriedade* (4.6) existe um número $L > 0$ tal que $\dfrac{1}{f(x) - m} < L \quad x \in [a,\ b]$, logo $f(x) - m > \dfrac{1}{L}$ isto

é $f(x) > m + \dfrac{1}{L}$ $\quad x \in [a,\ b]$; porém $m + \dfrac{1}{L} > m$, o qual é uma contradição, pois $m + \dfrac{1}{L}$ é um limite inferior maior que o ínfimo m.

Portanto concluímos que existe pelo menos um ponto $x_1 \in [a,\ b]$ tal que $f(x_1) = m = \min A$.

De modo análogo mostra-se que existe $x_2 \in [a,\ b]$ tal que $f(x_2) = M$. □

Este último teorema nos mostra que toda função contínua f, definida em um intervalo fechado e limitado $[a, b]$, assume pelo menos um valor mínimo $m = f(x_1)$ e pelo menos um valor máximo $M = f(x_2)$.

Exemplo 4.15.

Consideremos a função contínua $f : (0,\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *para todo* $x \in (0, 1]$.

Como $f((0, 1]) = [1,\ +\infty)$, *não existe* $x_2 \in (0,\ 1]$ *tal que* $f(x) \leq f(x_2)$ *para todo* $x \in (0,\ 1]$. *Notemos que, apesar de* $(0,\ 1]$ *ser limitado, ele não é fechado.*

Exemplo 4.16.

Consideremos a função contínua $f : (0,\ 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = x$ *para todo* $x \in (0,\ 1)$.

Como $f((0,\ 1)) = (0,\ 1)$, *não existem* $x_1,\ x_2 \in (0,\ 1)$ *tais que* $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ *para todo* $x \in (0,\ 1)$. *Notemos que, apesar de* $(0,\ 1)$ *ser limitado, ele não é fechado*

Exemplo 4.17.

Seja $f : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a,\ b]$ *tal que* $f(x) > 0$ *para todo* $x \in [a,\ b]$. *Então existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) \geq \delta$ *para todo* $x \in [a,\ b]$.

De fato, pelo Teorema (4.2) *existe* $x_1 \in [a, b]$ *tal que* $f(x_1) \leq f(x)$ *para todo* $x \in [a, b]$. *Como* $f(x_1) > 0$, *basta tomar* $\delta = f(x_1)$ *para concluir a validade da nossa afirmação.*

Teorema 4.3. *Do valor intermediário.*

Se f *é uma função contínua em* $[a, b]$, m *e* M *são o mínimo e máximo de* f *em* $[a, b]$ *respectivamente e* d *é tal que* $m < d < M$, *então existe* $c \in (a,\ b)$ *tal que* $f(c) = d$.

Demonstração.

Pelo Teorema (4.2), existem $x_1,\ x_2 \in [a,\ b]$ tais que $f(x_1) = m$ e $f(x_2) = M$.

A função $g(x) = f(x) - d$ é contínua em $[a,\ b]$; consequentemente no intervalo de extremos x_1 e x_2.

Observe que $g(x_1) = f(x_1) - d = m - d < 0$ e $g(x_2) = f(x_2) - d = M - d > 0$, logo, pelo Teorema (4.1) existe c no intervalo de extremos x_1 e x_2 tal que $g(c) = 0$, isto é $f(c) = d$. □

Exemplo 4.18.

O polinômio $p(x) = x^3 + x - 1$ *possui uma raiz no intervalo* $(0,\ 1)$.

De fato, temos $p(0) = -1 < 0$ *e* $p(1) = 1 > 0$. *Como* $p(x)$ *é uma função contínua no intervalo* $(0,\ 1)$, *segue do teorema do valor intermédio que existe* $x \in (0,\ 1)$ *tal que* $p(x) = 0$.

Exemplo 4.19.

Dada a função $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$, *determine um valor* $c \in [0,\ 2]$ *do Teorema (4.3) do valor intermediário, e verifique a validade do resultado.*

Solução.

Temos que $f(0) = -1$ e $f(2) = \dfrac{1}{5}$. Consideremos um valor entre -1 e $\dfrac{1}{5}$, por exemplo $-\dfrac{1}{2}$, logo devemos determinar x_0 na igualdade:

$$\frac{x-1}{x^2+1} = -\frac{1}{2}$$

De onde obtemos $x = -1 \pm \sqrt{2}$, o valor $x_0 = -1 + \sqrt{2} \in [0, 2]$ de modo que $f(-1+\sqrt{2}) = -\dfrac{1}{2} \in [-1,\ \frac{1}{5}]$.

Não consideremos o valor $x = -1 - \sqrt{2}$ pelo fato não pertencer ao intervalo $[0,\ 2]$.

Propriedade 4.7.

Se n *é ímpar, então qualquer equação* $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ *possui uma raiz real.*

Demonstração.

Seja $f(x) = x^n\left[1 + \dfrac{a_{n-1}}{x} + \dfrac{a_{n-2}}{x^2} + \dfrac{a_{n-3}}{x^3} + \cdots + \dfrac{a_2}{x^{n-2}} + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{x^n}\right]$ observe que:

$$\left|\frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \frac{a_{n-3}}{x^3} + \cdots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{a_{n-1}}{x}\right| + \left|\frac{a_{n-2}}{x^2}\right| + \left|\frac{a_{n-3}}{x^3}\right| + \cdots + \left|\frac{a_2}{x^{n-2}}\right| + \left|\frac{a_1}{x^{n-1}}\right| + \left|\frac{a_0}{x^n}\right| \tag{4.6}$$

Escolhemos um x que cumpre o seguinte:

$\mid x \mid > 1,\ \mid x \mid > 2n \mid a_{n-1} \mid,\ \mid x \mid > 2n \mid a_{n-2} \mid,\ \cdots,\ \mid x \mid > 2n \mid a_1 \mid,\ \mid x \mid > 2n \mid a_0 \mid$, então

$$\mid x^k \mid > \mid x \mid \qquad \text{e} \qquad \left|\frac{a_{n-k}}{x^k}\right| < \left|\frac{a_{n-k}}{x}\right| < \frac{\mid a_{n-k} \mid}{2n \mid a_{n-k} \mid} = \frac{1}{2n}$$

De (4.6) $\quad \left|\dfrac{a_{n-1}}{x} + \dfrac{a_{n-2}}{x^2} + \dfrac{a_{n-3}}{x^3} + \cdots + \dfrac{a_2}{x^{n-2}} + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{x^n}\right| \leq$

$$\leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Logo, $\quad -\dfrac{1}{2} < \dfrac{a_{n-1}}{x} + \dfrac{a_{n-2}}{x^2} + \dfrac{a_{n-3}}{x^3} + \cdots + \dfrac{a_2}{x^{n-2}} + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{x^n} \leq \dfrac{1}{2}$ e

$$\frac{1}{2} < 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \frac{a_{n-3}}{x^3} + \cdots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}$$

Suponha um $x_1 > 0$, então:

$$0 \leq \frac{x_1^2}{2} \leq x_1^2 \left[1 + \frac{a_{n-1}}{x_1} + \frac{a_{n-2}}{x_1^2} + \frac{a_{n-3}}{x_1^3} + \cdots + \frac{a_2}{x_1^{n-2}} + \frac{a_1}{x_1^{n-1}} + \frac{a_0}{x_1^n}\right] = f(x_1)$$

De modo que $f(x_1) > 0$. Por outro lado, quando $x_2 < 0$, então $x_2^n < 0$ (n é ímpar) e :

$$0 \geq \frac{x_2^2}{2} \geq x_2^2 \left[1 + \frac{a_{n-1}}{x_2} + \frac{a_{n-2}}{x_2^2} + \frac{a_{n-3}}{x_2^3} + \cdots + \frac{a_2}{x_2^{n-2}} + \frac{a_1}{x_2^{n-1}} + \frac{a_0}{x_2^n}\right] = f(x_2)$$

de modo que $f(x_2) < 0$.

Observe que $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, aplicando o *Teorema* (4.1) existe um número $x \in [x_1, x_2]$ de modo que $f(x) = 0$.

Exemplo 4.20. *Outra demonstração da Propriedade* (4.7)

Mostre que se, n é ímpar, então qualquer equação $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ possui uma raiz real.

Demonstração.

Seja $f(x) = x^n \left[1 + \dfrac{a_{n-1}}{x} + \dfrac{a_{n-2}}{x^2} + \dfrac{a_{n-3}}{x^3} + \cdots + \dfrac{a_2}{x^{n-2}} + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{x^n}\right]$ observe que: $f(x) = x^n \cdot g(x)$, onde

$$g(x) = 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \frac{a_{n-3}}{x^3} + \cdots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}$$

Por outro lado, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 1$ logo pela definição de limite ao infinito, temos $\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, n > 0$ tal que $\mid g(x) - 1 \mid < \varepsilon$, sempre que $\mid x \mid > n$.

Em particular, considere $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, assim $\mid g(x) - 1 \mid < \dfrac{1}{2}$ sempre que $\mid x \mid > n$. Logo $\dfrac{1}{2} < g(x) < \dfrac{3}{2}$.

Do fato $\mid x \mid > n$, existe $x_1 > 0$ e multiplicando esta última desigualdade por $x_1^n > 0$ temos que $0 < \dfrac{x_1^n}{2} < x_1^n \cdot g(x_1) = f(x_1) < \dfrac{3x_1^n}{2} \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x_1)$.

De modo análogo, do fato $\mid x \mid > n$, existe $x_2 < 0$ tal que do fato n ímpar $x_2^n < 0 \quad \Rightarrow$ $0 > \dfrac{x_2^n}{2} > x_2^n \cdot g(x_2) = f(x_2) > \dfrac{3x_2^n}{2} \quad \Rightarrow \quad f(x_2) < 0$.

Portanto, para $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ tal que, $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ pela *Teorema* (4.1) existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$. $\square$

Para este exemplo, lembre que $\text{D}(f) = \mathbb{R}$.

Propriedade 4.8.

Se n é par e $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$, então existe um número y tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

Considere $M = \max.\{1,\ 2n \mid a_{n-1} \mid,\ 2n \mid a_{n-2} \mid, \cdots,\ 2n \mid a_1 \mid,\ 2n \mid a_0 \mid\}$, então para todo $\mid x \mid \geq M$ temos

$$\frac{1}{2} < 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \frac{a_{n-3}}{x^3} + \cdots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}$$

Do fato n par, $x^n \geq 0$ para todo x, de modo que:

$$0 \leq \frac{x^2}{2} \leq x^2 \left[1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \frac{a_{n-3}}{x^3} + \cdots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right] = f(x)$$

sempre que $\mid x \mid \geq M$. Consideremos o número $f(0)$, e seja $b > 0$ um número tal que $b^n \geq 2f(0)$ e também $b > M$.

Então se $x \geq b$ temos $f(x) \geq \dfrac{x^n}{2} \geq \dfrac{b^n}{2} \geq f(0)$.

Analogamente, se $x \leq -b$ então $f(x) \geq \dfrac{x^n}{2} \geq \dfrac{(-b)^n}{2} \geq f(0)$; logo , se $x \geq b$ ou $x \leq -b$ então $f(x) \geq f(0)$. Aplicando a *Propriedade* (4.7) para a função $f(x)$ no intervalo $[-b, b]$, existe y tal que:

$$\text{Se} \quad -b \leq x \leq b, \quad \text{então} \quad f(y) \leq f(x) \tag{4.7}$$

Em particular $f(x) \leq f(0)$. Deste modo

$$\text{Se} \quad x \geq b \quad \text{ou} \quad x \leq -b \quad \text{então} \quad f(x) \geq f(0) \geq f(y) \tag{4.8}$$

Combinando (4.7) e (4.8) temos $f(y) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. □

Exemplo 4.21.

Mostre que, se $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[0,\ 1]$ tal que $f(x) \in [0,\ 1]$ para todo $x \in [0,\ 1]$. Então existe $x \in [0,\ 1]$ tal que $f(x) = x$, ou seja, f possui pelo menos um ponto fixo.

Com efeito, se $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$, nada a mostrar.

Suponhamos que $f(0) \neq 0$ e $f(1) \neq 1$ então como $f(0) \geq 0$ e $f(1) \leq 1$, necessariamente $f(0) > 0$ e $f(1) < 1$.

Definamos $g(x) = f(x) - x$ para todo $x \in [0,\ 1]$ então pela Propriedade (4.1) segue-se g é contínua. Como $g(1) = f(1) - 1 < 0 < f(0) - 0 = g(0)$, pelo Teorema do valor intermediário, existe $x \in (0,\ 1)$ tal que $g(x) = 0$, isto é $f(x) = x$.

Exercícios 4-2

1. Dada as seguintes funções, determine a continuidade nos intervalos indicados:

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|16 - x^4|}{4 - x^2} & \text{se} \quad x \neq \pm 2 \\ -8 & \text{se} \quad x = -2 \\ 8 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$ nos intervalos:

$(-\infty, -2)$; $(-\infty, -2]$; $(-2, 2)$; $[-2, 2)$; $[-2, 2]$; $(-2, 2]$; $[2, +\infty)$; $(2, +\infty)$.

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^3 + x^2 - x - 1|}{x^2 - 3x + 2} & \text{se} \quad x \neq 1 \quad \text{e} \quad x \neq 2 \\ -4 & \text{se} \quad x = 1 \\ 4 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$ nos intervalos:

$(-\infty, 1)$; $(-\infty, 1]$; $(1, 2)$; $[1, 2]$; $[2, +\infty)$; $(2, +\infty)$.

3. $f(x) = \sqrt{|x| - [|x|]}$ em $(0, 1]$, $[0, 1]$, $[1, 3]$.

4. $f(x) = (x - 1)[|x|]$ em $[0, 2]$.

2. Para os seguintes exercícios, estabelecer se a função é contínua nos intervalos indicados. Construir o gráfico da função.

1. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 3x - 10}$ em $(2, 4)$.

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 6}{x^2 - 2x - 8} & \text{se} \quad x \neq 4 \\ -2 & \text{se} \quad x = 4 \end{cases}$ em $(-1, 6)$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 4}{x^2 - 16} & \text{se} \quad x \neq \pm 4 \\ -\dfrac{1}{8} & \text{se} \quad x = -4 \\ 2 & \text{se} \quad x = 4 \end{cases}$ em $(-5, 5)$.

4. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 1 & \text{se} \quad -1 < x \leq 2 \\ 2x - 6 & \text{se} \quad 2 < x \leq 3 \\ 4x - 3 - x^2 & \text{se} \quad 3 < x < 5 \end{cases}$ em $(-1, 5)$.

5. $f(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{se} \quad -1 < x \leq 2 \\ x^2 - 6 & \text{se} \quad 2 < x < 5 \end{cases}$ em $(-1, 5)$.

6. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - 1)\,|x - 2|}{|x^2 - 1|} & \text{se} \quad 0 < x < 4, \quad x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$ em $(0, 4)$

3. Determine os valores a e b de tal modo que cada uma das funções seja contínua em seu domínio.

1. $f(x) = \begin{cases} x + 2a & \text{se} \quad x < -2 \\ 3ax + b & \text{se} \quad -2 \leq x \leq 1 \\ 6x - 2b & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} b & \text{se,} \quad -\dfrac{3}{2} \leq x \leq 0 \\ \dfrac{\mid 2x^2 - 3x - 9 \mid}{2x^2 - 3x - 9}, & \text{se,} \quad x < -\dfrac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x > 3 \\ a & \text{se,} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{3}{2} \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - \sqrt[3]{3x+3}}{a(\sqrt[3]{x} - 2)} & \text{se} \quad x < 8 \\ ab, & \text{se,} \quad x = 8 \\ \dfrac{2}{b \cdot \mid 2x - 7 \mid} & \text{se} \quad x > 8 \end{cases}$

4. Determine o intervalo de continuidade para cada uma das seguintes funções:

1. $f(x) = \begin{cases} 1 - x + [|x|] & \text{se } x \geq 0 \\ \left[\left|\dfrac{1}{x}\right|\right] & \text{se } x < 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{16 - x^2}{x - 6}}$

3. $f(x) = \mid 1 - x + [|x|] - [|1 - x|] \mid$

4. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 16}{x - 6}}$

5. $f(x) = \mid x - [|x|] + \mid [|1 - x|] \mid$

6. $f(x) = \sqrt[3]{4 - \sqrt{x - 2}}$

7. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } 0 \leq x < 5 \\ \dfrac{x^2 - 4x - 5}{\mid x - 5 \mid} & \text{se } x > 5 \end{cases}$

8. $f(x) = \sqrt{\mid x \mid - [|x|]}$

9. $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x + 3 & \text{se } x \leq -1 \\ \mid x - 2 \mid & \text{se } -1 < x \leq 4 \\ 8x - x^2 - 15 & \text{se } x > 4 \end{cases}$

10. $f(x) = \dfrac{\mid 4x - 3 \mid - 1}{[|3 - 4x|]}$

5. Analise a continuidade em $\mathbb{R}$ para as funções fog e gof , se:

1. $f(x) = sgn(x) \quad \text{e} \quad g(x) = x - x^3.$

2. $f(x) = sgn(x) \quad \text{e} \quad g(x) = 1 + x - [|x|].$

3. $f(x) = \dfrac{x + \mid x \mid}{2} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}.$

4. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \mid x \mid \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad \mid x \mid > 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad \mid x \mid > 2 \\ 2 - x^2 & \text{se} \quad \mid x \mid \leq 2 \end{cases}.$

6. Dar exemplo de uma função definida em $[0,\ 1]$ que não tenha máximo nem mínimo em tal intervalo .

7. Se $f(x) = x^4 - 5x + 3$, localizar um intervalo $[a, b]$ onde tenha uma raiz real, justifique sua resposta

8. Seja $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$, calcular o valor que cumpre o *Teorema* (4.3) (do valor intermediário) para $d = 3$, em $[1,\ 6]$.

9. Seja $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a; b]$. Usando o Teorema de Weierstrass mostre que existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ para todo $x \in [a; b]$.

10. Considere um intervalo não trivial $I \subset R$ e uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua em I. Mostre que $f(I) = \{\ f(x)\ /.\quad x \in I\ \}$ é um intervalo.

11. Seja $T = \{\ \dfrac{sen(x^2)}{x^4+1}\ /.\quad x \in [-1; 2]\ \}$. Mostre que o conjunto T é um intervalo fechado e limitado

    Sugestão: Considere a função $f : [-1; 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{sen(x^2)}{x^4+1}$

12. Mostre que a equação $x^5 + 3x - 2 = 0$ tem uma raiz no intervalo $(0, 1)$.

13. Mostre que existe $x \in (0; 1)$ tal que $x^5 = \dfrac{1}{x^4+2}$

    Sugestão: Considere a função $f(x) = x^5 - \dfrac{1}{x^4+2}$ definida no intervalo $[0, 1]$.

14. Mostre que existe $x \in (\dfrac{\pi}{2}; \pi)$ tal que $\text{sen}x = x - 1$.

    Sugestão: Considere a função $f(x) = \text{sen}x - x + 1$ definida no intervalo $(\dfrac{\pi}{2}; \pi)$.

15. Seja $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua em [0,1] tal que $f(0) > 0$ e $f(1) < 1$. Mostre que existe $x \in (0; 1)$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$.

16. Suponhamos que a função $f(x) = \dfrac{\text{sen}\pi x}{x(x-1)}$ seja definida no intervalo $(0, 1)$. Definir f em $x = 0$ e $x = 1$ de modo que f seja contínua em $[0, 1]$.

17. Suponhamos que a função f está definida no intervalo $(0, 1)$ por $f(x) = \dfrac{1 - \cos(2\pi x)}{x^2(1-x)^2}$. Redefinir f para que seja contínua em $[0, 1]$.

18. Uma editora vende 10.000 livros de matemática aplicada quando o preço unitário é de $R\$15,00$, a editora determinou que pode vender 2.000 unidades a mais com uma redução de $R\$3,00$ no preço unitário. Ache a equação de demanda, supondo-a linear, e trace o gráfico respectivo.

19. Numa pequena cidade, com população de 5.000 habitantes, a taxa de crescimento de uma epidemia (a taxa de variação do número de pessoas infectadas) é conjuntamente proporcional ao número de pessoas infectadas e ao número de pessoas não infectadas. **(a)** Se a epidemia está crescendo à razão de 9 pessoas por dia quando 100 pessoas estão infectadas, expresse a taxa de crescimento da epidemia como função do número de pessoas infectadas. **(b)** Quão rápido está se afastando a epidemia, quando 200 pessoas estão infectadas ?

Miscelânea 4-1

1. Determine quais das seguintes funções estão limitadas superior e inferiormente no intervalo indicado; e quais delas alcançam seus valores de máximo ou mínimo.

   1. $f(x) = x^2$ em $(-1,\ 1)$ **2.** $g(x) = x^3$ em $(-1,\ 1)$

   3. $h(x) = x^2$ em $\mathbb{R}$ **4.** $f(x) = x^2$ em $[0,\ +\infty)$

   5. $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se, } x \leq a \\ a+2, & \text{se, } x > a \end{cases}$ em $(-a-1, a+1)$; $a > 0$ (sugestão: considerar valores distintos para a)

2. Para cada uma das seguintes funções, determine um inteiro n tal que $f(x) = 0$ para algum $x \in [n,\ n+1]$.

   1. $f(x) = x^3 - x + 3$ **2.** $g(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$

   3. $f(x) = x^5 + x + 1$ **4.** $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

3. **1.** Mostre que se f é uma função contínua em $[a,\ b]$, então existe uma função g que é contínua em $\mathbb{R}$, e que cumpre $g(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,\ b]$. (Sugestão: considere uma função $g(x)$ constante em $(-\infty,\ a] \cup [b, +\infty)$.

   2. Observe que a afirmação em **(1.)** deste item é falsa se substituirmos o intervalo $[a,\ b]$ por $(a,\ b)$. Justificar.

4. Seja $f : [0,\ 4] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{2x - x^2}{x + x^2}$, pede-se:

   1. Provar que $x = 4$ é o ponto mínimo de f isto é $f(4) \leq f(x)$, para todo $x \in [0,\ 4]$.

   2. Provar que $\exists\, x_2 \in [0,\ 2]$ tal que $f(x_2)$ é o valor máximo de f, isto é $f(x_2) \geq f(x), \quad \forall\, x \in [0,\ 4]$

5. Seja $f(x) = \begin{cases} \text{sen}\dfrac{1}{x}, & \text{se, } x \neq 0 \\ 1, & \text{se, } x = 0 \end{cases}$;

   f tem descontinuidade evitável em $x = 0$?. E quando se substitui $f(x) = x.\text{sen}(\dfrac{1}{x})$ para $x \neq 0$?

6. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua não constante em $[a,\ b]$. Provar que $Im(f) = [m,\ M]$ onde $m = \min\limits_{x \in [a,\ b]} .f(x)$ e $M = \max\limits_{x \in [a,\ b]} .f(x)$.

7. Provar que o polinômio $P(x) = 4x^3 - 14x^2 + 14x - 3$ tem três raízes reais diferentes.

8. Suponhamos que $f : [0,\ 1] \longrightarrow [0,\ 1]$ seja uma função contínua. Provar que existe $c \in [0,\ 1]$ tal que $f(c) = c$

9. Mostre que existe algum número x tal que:

1. $x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + \text{sen}^2 x} = 119$ **2.** $\text{sen}x = x - 1.$

10. Determine quais das seguintes funções estão limitadas superior e inferiormente no intervalo indicado; e quais delas alcançam seus valores de máximo ou mínimo.

1. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se, } x < a \\ a + 2, & \text{se, } x \geq a \end{cases}$ em $[-a - 1,\ a + 1]$

2. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se, } x \in \mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{q}, & \text{se, } x = \dfrac{p}{q} \text{ é fração irredutível} \end{cases}$ em $[0,\ 1]$

3. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se, } x \in \mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{q}, & \text{se, } x = \dfrac{p}{q} \text{ é fração irredutível} \end{cases}$ em $[0,\ 1]$

4. $g(x) = \text{sen}^2(\cos x + \sqrt{1 + a^2})$ em $[0,\ a^3]$.

5. $h(x) = |[x|]$ em $[0,\ a]$.

Capítulo 5

DERIVADAS

"Fermat o verdadeiro inventor do cálculo diferencial $\cdots$"
LAPLACE

P. Fermat

Pierre De Fermat nasceu em Beaumont na França, no ano de 1601*, e faleceu em Castres, em* 12 *de janeiro de* 1665*. Cedo, manifestou interesse pelo estudo de línguas estrangeiras, literatura clássica, ciência e matemática; foi educado em casa. Três anos depois de se formar em direito pela, Universidade de Orléans, tornou-se conselheiro do Parlamento de Tolouse, em* 1634*; era muito ocupado; em suas horas livres teve tempo para se dedicar à literatura clássica, inclusive ciência e matemática.*

Em 1629*, ele começou a fazer descobertas de importância capital em matemática. Nesse ano, ele começou a praticar um dos esportes favoritos do tempo: a "restauração" de obras perdidas da antiguidade, com base em informações encontradas nos tratados clássicos preservados. Fermat se propôs a reconstruir os lugares planos de Apolônio, baseado em alusões contidas na Coleção Matemática de Papus. Suas obras consistem em artigos isolados. Seus resultados mais impressionantes foram encontrados depois de sua morte.*

Fundador da moderna teoria dos números, Fermat antecipou-se a Descartes, descobriu em 1636 *o princípio fundamental da geometria analítica.*

Fermat não concordou com Descartes e deu ênfase ao esboço de soluções de equações indeterminadas ao invez de à construção geométrica das soluções de equações algébricas determinadas. Fermat limitou sua exposição no curto tratado intitulado "Introdução aos lugares planos e sólidos".

Pertence a Fermat a famosa conjetura sobre a existência de soluções em números inteiros para a equação $x^n + y^n = z^n$, para $n \in \mathbb{N}$, demonstrada em 1993*.*

5.1 Conceitos básicos

Um dos conceitos básicos do Cálculo Diferencial e Integral é o da derivada. As ciências em geral tiveram grande impulso em seu desenvolvimento pela necessidade de resolução de problemas concretos. Os dois problemas práticos seguintes são os que propiciaram a criação do conceito de derivada:

1. Determinar a equação da reta tangente a uma curva num ponto dado.

2. Dada a lei horária do movimento de uma partícula vinculada a uma reta. Isto é, uma equação $s = f(t)$ que dá a posição da partícula sobre a reta em cada instante t, determinar a velocidade da partícula em cada instante.

De início, as definições não tinham precisão. Já em 1.629 Pierre Fermat fazia uma abordagem do primeiro problema, tendo encontrado uma maneira de construir tangentes a uma parábola, e que continha implicitamente a ideia de derivada. Bem mais tarde, se percebeu que os dois problemas tinham algo em comum e que a ideia geral que permitiria resolvê-los necessariamente levaria a noção de derivada num ponto.

Por outro lado, a introdução de coordenadas cartesianas, além de facilitar o estudo de curvas já conhecidas, permitiu a "*criação*" de novas curvas, imagens geométricas de funções definidas por relações entre variáveis. Enquanto se dedicava ao estudo de algumas destas funções, Fermat deu conta das limitações do conceito clássico de reta tangente a uma curva como sendo aquela que encontrava a curva num único ponto.

Tornou-se assim importante reformular tal conceito e encontrar um processo de traçar uma tangente a um gráfico num dado ponto - esta dificuldade ficou conhecida na História da Matemática como o "*Problema da Tangente*". Fermat resolveu esta dificuldade de uma maneira muito simples: para determinar uma tangente a uma curva num ponto P considerou outro ponto Q sobre a curva; considerou a reta $\overline{PQ}$ secante à curva. Seguidamente fez deslizar Q ao longo da curva em direção a P, obtendo deste modo retas $\overline{PQ}$ que se aproximavam de uma reta t a que P. Fermat chamou "*a reta tangente à curva no ponto P*" (*Figura* (5.1)).

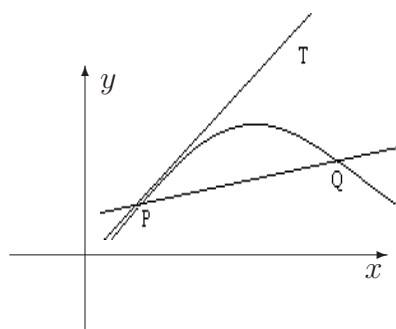



Figura 5.1:

Mais, Fermat notou que para certas funções, nos pontos onde a curva assumia valores extremos, a tangente ao gráfico devia ser uma reta horizontal, já que ao comparar o valor assumido pela função num desses pontos $P(x,\ f(x))$ com o valor assumido no outro ponto $Q(x+E,\ f(x+E))$ próximo de P, a diferença entre $f(x+E)$ e $f(x)$ era muito pequena, quase nula, quando comparada com o valor de E, diferença das abscissas de Q e P.

Assim, o problema de determinar extremos e de determinar tangentes a curvas passam a estar intimamente relacionados. Estas ideias constituíram o embrião do conceito de "*Derivada*" e levou Laplace a considerar "Fermat o verdadeiro inventor do Cálculo Diferencial". Contudo, Fermat não dispunha de notação apropriada e o conceito de limite não estava ainda claramente definido. No século XVII, Leibnitz algebriza o Cálculo Infinitesimal, introduzindo os conceitos de *variável, constante* e *parâmetro*, bem como a notação dx e dy para designar a menor possível das diferenças em x e em y.

Assim, embora só no século XIX Cauchy haja introduzido formalmente o conceito de limite e o conceito de derivada, no início do século XVII, com Leibnitz e Newton, o Cálculo Diferencial torna-se um instrumento cada vez mais indispensável, pela sua aplicabilidade aos mais diversos campos da ciência.

Definição 5.1. *Ponto de acumulação.*
O ponto limite ou ponto de acumulação, é um ponto em um conjunto que pode ser aproximado tão bem quanto se queira por infinitos outros pontos do conjunto .

5.2 Derivada de uma função

Seja a função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, e um ponto de acumulação $a \in A$.

Quando a variável independente da função f passa do ponto $a \in A$ para ao ponto $x \in A$, sofrendo um acréscimo ou incremento $\Delta x = x - a$, os correspondentes valores dados pela função passam de $f(a)$ para $f(a + \Delta x)$, sofrendo também um incremento

$$\Delta y = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$$

Definição 5.2. *Taxa média de variação.*
Chama-se "taxa média de variação" da função f relativa ao ponto $a \in A$ ao quociente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

sendo esta função definida em todo $x \in A$, exceto possivelmente em $x = a$.

Exemplo 5.1.

Seja a função $f(x) = x^2$ construamos a taxa média de variação relativa ao ponto $a = 3$. Temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)} \tag{5.1}$$

a qual, para $x \neq 3$, pode ser escrita $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = x + 3$.

Note-se que, se fizermos $x = 3$ em (5.1), obtemos a forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Entretanto, pode ser que exista o limite da razão (5.1) quando $x \to 3$ ou quando $\Delta x \to 0$ e esse limite seja finito.

Definição 5.3. *Derivada de uma função em um ponto.*
Seja $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, dizemos que f é derivável no ponto de acumulação $a \in A$, quando o seguinte limite existe e, é finito:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \tag{5.2}$$

Quando f seja derivável em $x = a$, o limite (5.2) é chamado *derivada de f no ponto a*, e é indicado com uma das seguintes notações: $f'(a)$; $Df(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$ devidas, respectivamente, a J. L. Lagrange, A. L. Cauchy, e G. W. Leibnitz.

Observação 5.1.

A Definição (5.3) *é equivalente a:*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Definição 5.4. *Função derivada.*
Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, designemos por $B = \{\ x \in \mathbb{R} \ /.\ f'(x)\ \ exista\ \}$, se $B \neq \emptyset$ a função:

$$\begin{array}{rccc} f' : & B \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

definida em B é denominada função derivada de f, ou simplesmente primeira derivada de f, e é indicada com uma das notações : f'; Df; $\frac{df}{dx}$.

Exemplo 5.2. *Derivada da função constante.*

Prove que a função constante $f(x) = k$ onde $k \in \mathbb{R}$, é derivável em todo ponto $a \in \mathbb{R}$ e $f'(a) = 0$.

Solução.

Para todo $a \in \mathbb{R}$ temos: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{k - k}{x - a} = 0$, isto é, $f'(a) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Portanto, sua função derivada é $f'(x) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 5.3. *Derivada da função afim.*

Provar que a função $f(x) = cx + d \quad (c,\ d \in \mathbb{R},\ c \neq 0)$ *é derivável em todo* $a \in \mathbb{R}$ *e,* $f'(a) = c$.
Solução.

Com efeito, para todo $a \in \mathbb{R}$ temos:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(cx + d) - (ca + d)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c(x - a)}{x - a} = c$$

Assim, obtemos derivada da função $f(x) = cx + d$ pe a função $f'(x) = c, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.
Portanto, $f'(a) = c$.

Exemplo 5.4. *Derivada da função* $f(x) = x^2$.
Mostre que, se $f(x) = x^2$ *,então* f *é derivável em todo* $x \in \mathbb{R}$ *e temos* $f'(x) = 2x$
Solução.

Temos, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $h = \Delta x$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{(x + h) - x} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0}(2x + h) = 2x$$

Portanto, $\quad f'(x) = 2x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 5.5. *Derivada da função* $f(x) = x^n$.
Mostre que a função $f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}, \quad n \neq 2)$ *é derivável em todo* $x \in \mathbb{R}$ *e temos* $f'(x) = nx^{n-1}$
Solução.

Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos: $\quad f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x + \Delta x) - x][(x + \Delta x)^{n-1} + x(x + \Delta x)^{n-2} + \ \cdots\ + x^{n-2}(x + \Delta x) + x^{n-1}]}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}[(x + \Delta x)^{n-1} + x(x + \Delta x)^{n-2} + \ \cdots\ + x^{n-2}(x + \Delta x) + x^{n-1}] = nx^{n-1}$$

isto é, $f'(x) = nx^{n-1}$.

Exemplo 5.6.
Mostre que a função $f(x) =\mid x \mid$ *não é derivável em* $x = 0$
Solução.

Da definição da derivada $\quad f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mid x \mid}{x}$.
Da definição do valor absoluto, segue: $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = 1 \quad$ e $\quad \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = -1$.
Portanto, não existe $f'(0)$, porém verifica-se que f é uma função contínua em $x = 0$.

Exemplo 5.7. *Derivada da função exponencial.*

Prove que a função $f(x) = a^x$ para $a > 0$ e $a \neq 1$ é derivável em todo $x \in \mathbb{R}$, e temos $f'(x) = a^x\text{Ln}a$.

Solução.

Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} a^x \cdot \dfrac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^h - 1}{h}$, e sendo, pelo limite notável do Exemplo (3.54), $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^h - 1}{h} = \text{Ln}a$, segue-se que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \text{Ln}a$.

Portanto , $f(x) = a^x$ é derivável e temos $f'(x) = a^x \cdot \text{Ln}a$.

No caso particular em que $a = e$ teríamos, $f'(x) = e^x$, pois $\text{Ln}e = 1$.

Exemplo 5.8. *Derivada da função* $\text{sen}\, x$*.*

Prove que se $f(x) = \text{sen}x$, então $f'(x) = \cos x$.

Solução.

Temos: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}x)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}x \cdot \cos h + \text{sen}h \cdot \cos x - \text{sen}x}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{\text{sen}x(\cos h - 1)}{h} + \frac{\text{sen}h \cdot \cos x}{h}\right]$$

$$= \text{sen}x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}h}{h} = (\text{sen}x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x$$

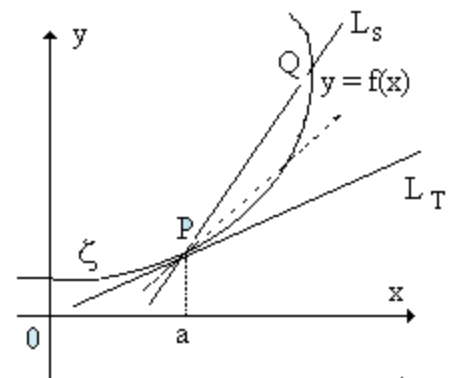
Logo, a função derivada para $f(x) = \text{sen}x$ é a função $f'(x) = \cos x$.

5.2.1 Reta tangente. Reta normal

Considere uma curva $\mathcal{C}$, e um ponto fixo P em tal curva, e seja uma reta secante que corta à curva $\mathcal{C}$ nos pontos P e Q, onde e $P \neq Q$ e o ponto $Q \in \mathcal{C}$.

Quando Q aproxima-se indefinidamente ao ponto P, através da curva $\mathcal{C}$, a secante ocupará diversas posições. Se, com a aproximação ilimitada do ponto Q através da curva $\mathcal{C}$ para o ponto P, a secante tende a ocupar a posição de uma reta denominada $\overline{LT}$, chama-se a esta última de *reta tangente à curva* $\mathcal{C}$ *no ponto* P, como indica-se na *Figura* (5.2).

Figura 5.2:

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, função derivável em $x = a$; considerando a interpretação geométrica da derivada $f'(a)$ temos as seguintes definições:

Definição 5.5. *Reta tangente.*
A reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ *no ponto* $P(a,\ f(a))$ *tem por equação:*

$$L_T : y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Definição 5.6. *Reta normal.*
A reta que passa pelo ponto $P(a,\ f(a))$ *e é perpendicular à reta tangente no gráfico de* f *em* P*, é chamada "Reta normal ao gráfico de* f *no ponto* P*". (Figura* (5.3)*).*

Se $f'(a) \neq 0$ a equação da reta normal é dada por: $L_N : y - f(a) = -\dfrac{1}{f'(a)}(x - a)$.

Se $f'(a) = 0$, a equação da reta normal é: $L_N : x = a$.

Figura 5.3:

O comprimento do segmento da tangente $\overline{AP}$, compreendido entre o ponto de tangência e o eixo x, é chamado de *comprimento da tangente*, e é denotado por T.

A projeção de $\overline{AP}$ sobre o eixo x, isto é $\overline{AB}$ é chamado *subtangente*, e seu comprimento denota-se com S_T. O comprimento do segmento da normal $\overline{PC}$, compreendido entre o ponto de tangência e o eixo x, é chamado de *comprimento da normal*, e é denotado com N. A projeção de $\overline{PC}$ sobre o eixo x, é chamado *subnormal* e seu comprimento denota-se com S_N.

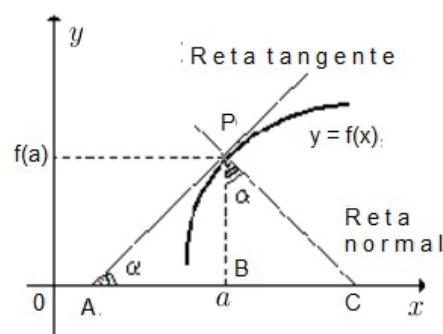
Da *Figura* (5.3) temos:

- $S_T =\mid \overline{AB} \mid= \left|\dfrac{f(a)}{\tan\alpha}\right| = \left|\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right|$

- $T =\mid \overline{AP} \mid= \sqrt{(f(a))^2 + S_T} = \left|\dfrac{f(a)}{f'(a)}\sqrt{(f(a))^2 + 1}\right|$

- $S_N =\mid \overline{BC} \mid=\mid f(a) \cdot \tan\alpha \mid=\mid f(a) \cdot f'(a) \mid$

- $N =\mid \overline{PC} \mid= \sqrt{(f(a))^2 + S_N} = f(a) \cdot \sqrt{(f(a))^2 + 1}$

À luz desta interpretação geométrica, podemos definir:

$$r(\Delta x) := f(a + \Delta x) - f(a) - f'(a)\Delta x \tag{5.3}$$

de onde, em virtude da definição da derivada e da igualdade (5.3), segue que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{r(\Delta x)}{\Delta x} = 0 \tag{5.4}$$

Vejamos tal fato geometricamente.

Observe, a medida que $\Delta x \to 0$, o ponto $a + \Delta x$ tende para o ponto a, as retas *secantes* aos pontos $(a,\ f(a))$ e $(a + \Delta x,\ f(a + \Delta x))$ tendem à reta tangente no ponto $(a,\ f(a))$ e o resto $r(\Delta x)$ tende modularmente para zero.

Notemos que o produto $f'(a) \cdot \Delta x$ pode ser encarado, a medida que Δx varia em $\mathbb{R}$, como uma aplicação linear $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $T(\Delta x) = f'(a) \cdot \Delta x$ (que depende do ponto a) de modo que definindo-se, como em (5.3),

Figura 5.4: O conceito de derivada associado à existência de aplicações lineares.

$$r(\Delta x) := f(a + \Delta x) - f(a) - T(\Delta x)$$

temos $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{r(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$

No caso unidimensional, o conceito de derivada à luz do exposto acima pode não ajudar muito. Contudo, quando consideramos funções reais de mais de uma variável, esta nova maneira de conceber o conceito de derivada é de fundamental importância, conforme será abordado posteriormente em disciplina Cálculo de Várias Variáveis.

Exemplo 5.9.

Dada a função $g(x) = x^2 + 3x - 2$, obter as equações da reta tangente e reta normal ao gráfico de f no ponto $P(2,\ 8)$ e determine os comprimentos da reta tangente, normal, subtangente e subnormal.

Solução.

Como $g(2) = 8$, então $P(2,\ 8)$ pertence ao gráfico de $g(x)$.

Por outro lado, $g'(x) = 2x+3$, logo $g'(2) = 7$, assim a equação da reta tangente pedida é: $L_T :\ y - 8 = 7(x - 2)$ isto é $7x - y = 6$.

O coeficiente angular da reta normal é $m = -\dfrac{1}{g'(2)} = -\dfrac{1}{7}$ e sua equação, $L_N :\ y - 8 = -\dfrac{1}{7}(x - 3)$ isto é: $L_N :\ x + 7y = 59$.

O comprimento da tangente é: $T = \dfrac{3}{2}\sqrt{5}$; o comprimento da normal é : $N = 3\sqrt{5}$; o comprimento da subtangente é : $S_T = \dfrac{3}{2}$ e, o comprimento da subnormal é : $S_N = 6$.

Exemplo 5.10.

Seja $f(x) = x^2 - x - 2$. *Determine a equação da reta tangente ao gráfico de* f *que seja paralela à reta* $L:\ x + y = 8$.

Solução.

O coeficiente angular da reta L é $m = -1$.

O coeficiente angular da reta a determinar e $f'(x) = 2x - 1$.

Desde que as retas tem que ser paralelas, $f'(x) = -1$ o que implica $2x - 1 = -1$ logo $x = 0$ e o ponto de tangência acontece em $P(0,\ f(0))$ isto é em $P(0,\ -2)$.

Portanto, a equação da reta pedida é: $y - (-2) = -1(x - 0)$ isto é $x + y = -2$.

Exemplo 5.11.

A reta L *passa pelos pontos* $P(4,\ 5)$ *e* $Q(9,\ 11)$ *e, é normal ao gráfico de* $h(x) = x^2 - 4$ *em* $R(a, h(a))$. *Determine* R *e a equação de* L.

Solução.

Aplicando derivadas, o coeficiente angular da reta normal L é :$m = -\dfrac{1}{h'(a)} = -\dfrac{1}{2a}$.

Por outro lado, aplicando a definição, dados os pontos P e Q o coeficiente angular da reta normal L é dado por $m = \dfrac{11-5}{9-4} = \dfrac{6}{5}$.

Logo $-\dfrac{1}{2a} = \dfrac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad a = -\dfrac{5}{12}$ e $h(a) = \left(\dfrac{-5}{12}\right)^2 - 4 = -\dfrac{551}{144}$; então $R(-\dfrac{5}{12}, -\dfrac{551}{144})$

e a equação da reta L é : $y - 5 = \dfrac{6}{5}(x - 4)$.

Portanto, $L:\ 6x - 5y = -1$.

5.3 Derivadas laterais

Seja $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, e o ponto de acumulação $a \in A$.

Definição 5.7. *Derivada á esquerda.*

Diz-se que f *é derivável à esquerda no ponto* $x = a$, *quando existe e é finito o limite:*

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Este limite é chamado *derivada de* f *à esquerda do ponto* $x = a$, e indicado com uma das notações: $f'(a^-)$; $Df(a^-)$; $\dfrac{df}{dx}(a^-)$.

Definição 5.8. *Derivada à direita.*
Diz-se que f é derivável à direita no ponto $x = a$ quando existe e é finito o limite:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Este limite é chamado *derivada de f à direita do ponto $x = a$* e indicado com uma das notações: $f'(a^+)$; $Df(a^+)$; $\dfrac{df}{dx}(a^+)$.

Exemplo 5.12.

Calcule as derivadas laterais no ponto $a = 0$ da função:

$$f(x) = \begin{cases} x & se \quad x \leq 0 \\ x^2 & se \quad x > 0 \end{cases}$$

Solução.

Da *Definição* (5.7), temos que $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x - 0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \cdot 1 = 1$. Por tanto, $f'(0^-) = 1$.

Por outro lado, pela *Definição* (5.8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2 - 0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \cdot x = 0$. Logo, $f'(0^+) = 0$. Não existe derivada de $f(x)$ no ponto $x = 0$.

Exemplo 5.13.

Calcule as derivadas laterais da função $f(x) =| x |$ no ponto $x = 0$.
Solução.

Pelo mostrado no *Exemplo* (5.6), resulta que:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{| x |}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

logo, $f'(0^-) = -1$ e $f'(0^+) = 1$; portanto $f(x) =| x |$ não é derivável em $x = 0$.

Exemplo 5.14.

Prove que a função $f(x) = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ 1 & se \quad x < 0 \end{cases}$ *não é derivável à esquerda no ponto* $x = 0$.
Solução.

De, fato temos $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1 - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, e a função não é derivável à esquerda, porque o limite lateral à esquerda não é finito (é infinito).

Propriedade 5.1.

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, uma função,* f *é derivável em* $x = a$ *se, e somente se existem e são iguais as derivadas laterais* $f'(a^-)$ *e* $f'(a^+)$*.*

A demonstração desta propriedade é exercício para o leitor.

5.4 Derivabilidade e continuidade

Propriedade 5.2.

Se uma função $y = f(x)$ *é derivável no ponto* $x = a$*, então ela é contínua em* $x = a$*.*

Demonstração.

Por hipótese, f é derivável em $x = a$; então $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe e, é finito.

Por outro lado, para todo $x \in \text{D}(f)$, $\quad x \neq a$, a seguinte identidade é válida:

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$$

Então calculando o limite em $[f(x) - f(a)]$ quando $x \to a$, e aplicando a propriedade do produto de limites e a existência de $f'(a)$, temos:

$$\lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = f'(a).0 = 0$$

isto é $\lim\limits_{x \to a}[f(x) - f(a)] = 0$.

Portanto, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$; isto é f é contínua no ponto $x = a$. $\square$

Observação 5.2.

A recíproca da Propriedade (5.2) *não é verdadeira, isto é, uma função pode ser contínua num ponto, sem que seja derivável nesse ponto.*

Um exemplo é dado pela função $f(x) =| x |$ que é contínua no ponto $x = 0$, porém não é derivável nesse ponto (veja o *Exemplo* (5.6)).

Outro exemplo é dado pela função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

ela é contínua no ponto $x = 0$, porém não é derivável nesse ponto.

Exemplo 5.15.

Analisar a derivabilidade em $x = 2$ *para a função* $f(x)$ *definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & se \quad x \leq 2 \\ x^2 - 4x + 4 & se \quad x > 2 \end{cases}$$

Solução.

A função é contínua em $x = 2$, porém não é derivável em $x = 2$; observe que as derivadas laterais são diferentes:

$$f'(2^-) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(2 - x^2) - (2 - 2^2)}{x - 2} = -4$$

$$f'(2^+) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x^2 - 4x + 4) - (2 - 2^2)}{x - 2} = +\infty$$

Exemplo 5.16.

Determine valores a e b para que exista $f'(1)$ se: $f(x) = \begin{cases} ax + b, & se, \quad x \geq 1 \\ x^2, & se, \quad x < 1 \end{cases}$

Solução.

Como $f'(1)$ existe, então f é contínua em $x = 1$; isto é $f(1) = 1 = a + b$ e $f'(1^-) = f'(1^+)$, como $f'(1^-) = 2$ e $f(1^+) = a$ obtém-se que $a = 2$, consequentemente $b = -1$.

Exemplo 5.17.

Determine se a função $f(x) = \begin{cases} x^2, & se, \quad x \text{ é racional} \\ 0, & se, \quad x \text{ é irracional} \end{cases}$ *é derivável em $x = 0$.*

Solução.

Da definição de função derivável no ponto $x = 0$ temos:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}$$

porém, $\dfrac{f(h)}{h} = \begin{cases} h, & \text{se}, \quad h \text{ é racional} \\ 0, & \text{se}, \quad h \text{ é irracional} \end{cases}$ logo, é derivável em $x = 0$ e em quaisquer dos dois casos $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)}{h} = 0$.

Portanto, $f'(0) = 0$.

Exemplo 5.18.

Determine se a função $f(x)$ assim definida :

$$f(x) = \begin{cases} x, & se, \quad x \geq 0 \\ 1, & se, \quad x < 0 \end{cases}$$

é derivável em $x = 0$.

Solução.

Considerando a recíproca da *Propriedade* (5.2) temos: "*Se uma função não é contínua em $x = a$, então ela não é derivável em $x = a$*".

Observe que a função $f(x)$ não é contínua em $x = 0$; logo ela não é derivável em $x = 0$.

5.4.1 Regras de derivação

Propriedade 5.3.

Sejam f e g funções definidas num conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ e deriváveis em $a \in A$, e $k \in \mathbb{R}$ uma constante.

Então, as funções kf, $f+g$, e também $\frac{1}{g}$ e $\frac{f}{g}$ se $g(a) \neq 0$, são deriváveis em $x = a$, e temos:

i) $(kf)'(a) = kf'(a)$.

ii) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

iii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

iv) $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}$ *sempre que* $g(a) \neq 0$.

v) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$ *sempre que* $g(a) \neq 0$.

Demonstração. **(i)**

Do fato ser k uma constante temos:

$$(kf)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(kf)(x) - (kf)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{kf(x) - kf(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} k \cdot \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right] =$$

$$= k \cdot \left[\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right] = k \cdot f'(a)$$

Portanto, kf é derivável em $x = a$, e $(kf)'(a) = kf'(a)$.

Demonstração. **(ii)**

$$(f+g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right] =$$

e como f e g são deriváveis em $x = a$,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(a) + g'(a)$$

Portanto, $f+g$ é derivável em $x = a$ e $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

Demonstração. **(iii)**

Temos, adicionando e substraindo $f(a) \cdot g(x)$

$$(fg)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} =$$

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(x) + f(a) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} \right] =$$

$$= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right] \tag{5.5}$$

Como f e g são deriváveis em $x = a$, elas são contínuas em $x = a$; logo, em (5.5) :

$$(fg)'(a) = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right] =$$

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \cdot \lim_{x \to a} g(x) + f(a) \cdot \lim_{x \to a} \left[\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right] = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

Portanto, $(f.g)(x)$ é derivável em $x = a$ e $(f.g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Demonstração. **(iv)**

Como g é derivável em $x = a$, é contínua em $x = a$ e sendo, por hipótese $g(a) \neq 0$, pela propriedade da conservação do sinal de uma função numa vizinhança, existe uma bola $B(a,\, r)$, tal que para qualquer $x \in B(a,\, r)$, temos $g(x)$ tem o mesmo sinal $g(a)$; de isto segue que $g(x) \neq 0$ em $B(a,\, r)$.

Logo, para $x \in B(a,\, r)$; temos:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{g(a) - g(x)}{g(a) \cdot g(x)}}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} -\frac{\frac{g(x) - g(a)}{g(a) \cdot g(x)}}{x - a} = -\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x) \cdot g(a)} = -g'(a) \cdot \frac{1}{(g(a))^2}$$

Portanto, $\dfrac{1}{g}$ é derivável em $x = a$, e tem-se: $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = -\dfrac{1}{(g(a))^2} \cdot g'(a)$.

Demonstração. **(v)**

Observe que, $\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$ e, por hipótese f e g deriváveis em $x = a$, logo por **(iv)** desta propriedade segue que $\dfrac{1}{g}$, (pois $g(a) \neq 0$) é derivável; de **(iii)** segue-se que e $\dfrac{f}{g}$ é derivável em $x = a$, assim:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} + f(a) \cdot \frac{-g'(a)}{(g(a))^2} =$$

$$= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}$$

Exemplo 5.19.

Dada a função $f(x) = (x^2 - 3x)^2$ *determine* $f'(x)$.

Solução.

$f(x) = (x^2 - 3x)^2 = (x^2 - 3x)(x^2 - 3x)$, então aplicando a *Propriedade* (5.3) *iii)* segue $f'(x) = (2x - 3)(x^2 - 3x) + (x^2 - 3x)(2x - 3) = 2(x^2 - 3x)(2x - 3)$.

Propriedade 5.4.

Sejam $f_1, f_2, \cdots, f_n$ *funções definidas num mesmo conjunto* A, *e deriváveis em* $x = a \in A$ *então:*

i) $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ *é derivável em* $x = a$ *e temos:*

$(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)'(a) = f_1'(a) + f_2'(a) + \cdots + f_n'(a)$.

ii) $f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n$ *é derivável em* $x = a$ *e temos:*

$(f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n)'(a) =$

$= f_1'(a) \times f_2(a) \cdots f_n(a) + f_1(a) \times f_2'(a) \cdots f_n(a) + \cdots + f_1(a) \times f_2(a) \cdots f_n'(a)$.

Demonstração. **(i)**

A demonstração é feita por indução finita . De fato , para $n = 2$ ela é verdadeira pela *Propriedade* (5.3) *(ii)*, isto é , se f_1 e f_2 são deriváveis em $x = a$; então $f_1 + f_2$ é derivável em $x = a$ e temos $(f_1 + f_2)'(a) = f_1'(a) + f_2'(a)$.

Suponha para $n = p$ verdadeira, isto é, $(f_1 + f_2 + \cdots + f_p)'(a) = f_1'(a) + f_2'(a) + \cdots + f_p'(a)$, mostremos para $n = p + 1$.

Para $n = p + 1$, podemos escrever $f_1 + f_2 + \cdots + f_p + f_{p+1} = (f_1 + f_2 + \cdots + f_p) + f_{p+1}$. E, como $g = f_1 + f_2 + \cdots + f_p$ é derivável em $x = a$ (hipótese de indução) e também f_{p+1} segue-se pela *Propriedade* (5.3)*(ii)* que: $(f_1 + f_2 + \cdots + f_p + f_{p+1})'(a) = (f_1 + f_2 + \cdots + f_p)'(a) + f_{p+1}'(a) = f_1'(a) + f_2'(a) + \cdots + f_p'(a) + f_{p+1}'(a)$.

Logo, ela é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. **(ii)**

Exercício para o leitor.

Exemplo 5.20.

Dada $f(x) = 3x^5 + x^4 - x^3 + 1$ *calcule:* **a)** $f'(x)$; **b)**$f'(1)$.

Solução. **a)**

Pela *Propriedade* (5.3) parte *(i)* e *(ii)* temos:

$$f'(x) = (3x^5)' + (x^4)' + (-x^3)' + (1)' = 3(x^5)' + 4x^3 - (x^3)' + 0 =$$

$$= 15x^4 + 4x^3 - 3x^2 = 15x^4 + 4x^3 - 3x^2$$

Solução. **b)**

É uma substituição direta, $f'(1) = 15(1)^4 + 4(1)^3 - 3(1)^2 = 16$.

Exemplo 5.21.

Dada $f(x) = (x^2 + x + 1) \cdot x^3$ *calcular* $f'(x)$.

Solução.

Aplicando a *Propriedade* (5.3) parte *(iii)* e *(i)* temos:

$f'(x) = (x^2 + x + 1)' \cdot x^3 + (x^2 + x + 1) \cdot (x^3)' =$

$$= (2x + 1 + 0) \cdot x^3 + (x^2 + x + 1) \cdot 3x^2 = x^2(2x^2 + x + 3x^2 + 3x + 3) =$$

$$= x^2(5x^2 + 4x + 3)$$

Portanto, $f'(x) = x^2(5x^2 + 4x + 3)$.

Exemplo 5.22.

Se $f(x) = x$ *e* $g(x) = \mid x \mid$, *calcular* $(f + g)'(x)$.

Solução.

Temos: $f'(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $g'(x) = \begin{cases} 1, & \text{se,} \quad x \geq 0 \\ -1, & \text{se,} \quad x < 0 \end{cases}$.

Logo, $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) = \begin{cases} 2, & \text{se,} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{se,} \quad x < 0 \end{cases}$

Exemplo 5.23.

Dada $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, *para* $x \in \mathbb{R} - 0$ *e* $\in \mathbb{N}$, *calcule* $f'(x)$.

Solução.

Sendo $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ para $n \in \mathbb{N}$; temos por aplicações da *Propriedade* (5.3) *(iv)*, para todo $x \in \mathbb{R} - 0$: $f'(x) = \dfrac{0 - (x^n)'}{(x^n)^2} = \dfrac{-n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$.

Portanto, $f'(x) = -n \cdot x^{-n-1} = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$.

Exemplo 5.24.

Dada $f(x) = \dfrac{x + 2}{1 - x}$, $\quad x \neq 1$, *calcule* $f'(x)$.

Solução.

Temos, por aplicação da *Propriedade* (5.3)-**(v)**, para $x \neq 1$:

$$f'(x) = \frac{(x+2)'(1-x) - (x+2)(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1 \cdot (1-x) - (x+2)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{3}{(1-x)^2}$$

Portanto, $f'(x) = \dfrac{3}{(1-x)^2}$

Exemplo 5.25.

Dada a função $f(x) = \dfrac{x \cdot e^x}{1+x^2}$, *calcular* $f'(x)$.

Solução.

Aplicando a *Propriedade* (5.3)-**(v)** e o *Exemplo* (5.7), vem:

$$f'(x) = \frac{(x \cdot e^x)'(1+x^2) - x \cdot e^x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{(1 \cdot e^x + x \cdot e^x)(1+x^2) - x \cdot e^x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{e^x + x \cdot e^x + x^2 e^x + x^3 e^x - 2x^2 e^x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(1+x-x^2+x^3)}{(1+x^2)^2}$$

Portanto, $f'(x) = \dfrac{e^x(1+x-x^2+x^3)}{(1+x^2)^2}$

Observação 5.3.

a) Quando $n \in \mathbb{Z}$ e $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n.x^{n-1}$.

b) Em geral, se c é um número racional e $f(x) = x^c$, então a derivada $f'(x) = c \cdot x^{c-1}$.

Por exemplo, se $f(x) = \sqrt[5]{x}$, então $f'(x) = \dfrac{1}{5}\sqrt[5]{x^{-4}}$.

Exemplo 5.26.

Dada a função $f(x) = (x^2 - 2x)^3$, *determine* $f'(x)$.

Solução.

Aplicando-se a *Propriedade* (5.3)-**(iii)** temos: $f(x) = (x^2-2x)^3 = (x^2-2x)(x^2-2x)(x^2-2x)$ logo $f'(x) = (x^2-2x)'(x^2-2x)(x^2-2x) + (x^2-2x)(x^2-2x)'(x^2-2x) + (x^2-2x)(x^2-2x)(x^2-2x)'$, isto é: $f'(x) = (2x-2)(x^2-2x) + (x^2-2x)(2x-2) + (x^2-2x)(x^2-2x)(2x-2) = 3(2x-2)(x^2-2x)^2 = 6(x-1)(x^2-2x)$.

Portanto, $f'(x) = 6(x-1)(x^2-2x)$.

Exemplo 5.27.

Dada a função $f(x) = \dfrac{ax^5 + bx^4 + c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, *determine* $f'(x)$.

Solução.

Aplicando-se a *Propriedade* (5.3)*(ii)* e considerando que a, b e c são constantes, temos: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \cdot (ax^5 + bx^4 + c)$, então $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \cdot (5ax^4 + 4bx^3)$.

Portanto,$f'(a) = \dfrac{5ax^4 + 4bx^3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

5.4.2 Derivada de ordem superior

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, e $B = \{\, x \in \text{D}(f) \,/.\, f \text{ é derivável em } x \,\} \neq \emptyset$. A função f definida em B é chamada função derivada de $f(x)$ ou primeira derivada de $f(x)$ e é denotada pela função $f'(x)$. Suponha que exista um subconjunto não vazio em B para o qual $f'(x)$ admita derivada; isto é para o qual $(f')'(x)$ exista. A derivada da primeira derivada de $f'(x)$ é chamada segunda derivada de $f(x)$ e indicada com uma das seguintes notações:

$$f''(x), \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \quad D_x^2 f(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{se } y = f(x)$$

Quando $f''(a)$ existe, dizemos que $f(x)$ é duas vezes derivável em $x = a$ e o número $f''(a)$ é chamado de - *segunda derivada de f em $x = a$.*

Suponha que exista um subconjunto não vazio em B para o qual $f''(x)$ admita derivada; isto é para o qual $(f'')'(x)$ exista. A derivada da segunda derivada de $f(x)$ é chamada de *terceira derivada de* $f(x)$, e indicada com uma das seguintes notações:

$$f'''(x), \quad \frac{d^3f(x)}{dx^3}, \quad D_x^3 f(x), \quad \frac{d^3y}{dx^3} \quad \text{se} \quad y = f(x)$$

Quando $f'''(a)$ existe, dizemos que $f(x)$ é três vezes derivável em $x = a$ e o número $f'''(a)$ é chamado de *terceira derivada de f em $x = a$.*

Derivando sucessivamente a função $f(x)$ (sempre que seja possível), obtém-se a *n-ésima* derivada ou *derivada de ordem n da função* $f(x)$, e indica-se com alguma das seguintes notações:

$$f^{(n)}(x), \quad \frac{d^nf(x)}{dx^n}, \quad D_x^n f(x), \quad \frac{d^ny}{dx^n} \quad \text{se } y = f(x)$$

Propriedade 5.5. *Fórmula de Leibnitz.*

Suponhamos que as funções $f(x)$ e $g(x)$ sejam deriváveis até a ordem n num mesmo subconjunto A de números reais. Então $y = f(x) \cdot g(x)$ é derivável até a ordem n em A e temos:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = [f(x) \cdot g(x)]^{(n)} =$$

$$= \binom{n}{0} f^{(n)}(x) \cdot g(x) + \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x) \cdot g'(x) + \binom{n}{2} f^{(n-2)}(x) \cdot g\text{''}(x) \; + \cdots$$

$$\cdots + \binom{n}{n-2} f''(x) \cdot g^{(n-2)}(x) + \binom{n}{n-1} f'(x) \cdot g^{(n-1)}(x) + \binom{n}{n} f(x) \cdot g^{(n)}(x)$$

A demonstração é exercício para o leitor.

Exemplo 5.28.

Dada as funções $f(x) = \mid 5x^2 - 3x + 9 \mid$ *e* $g(x) = 5^x$ *calcular:* **i)** $f"(x)$ **ii)** $g"(x)$.

Solução. **(i)**

$$f(x) = \mid 5x^2 - 3x + 9 \mid = \begin{cases} 5x^2 - 3x + 9 & \text{se,} \quad 5x^2 - 3x \geq 9 \\ -(5x^2 - 3x + 9) & \text{se,} \quad 5x^2 - 3x < 9 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 10x - 3, & \text{se,} \quad 5x^2 - 3x \geq -9 \\ -(10x - 3), & \text{se,} \quad 5x^2 - 3x < -9 \end{cases} \text{ e } f''(x) = \begin{cases} 10 & \text{se,} \quad 5x^2 - 3x \geq -9 \\ -10 & \text{se,} \quad 5x^2 - 3x < -9 \end{cases}$$

Solução. **(ii)**

Para a função $g(x) = 5^x$ pelo *Exemplo* (5.7) temos $g'(x) = 5x \cdot \text{Ln}5$, logo $g"(x) = 5^x \cdot \text{Ln}5 \cdot \text{Ln}5$ assim $g''(x) = 5^x \cdot (\text{Ln}5)^2$.

Exemplo 5.29.

Considere a função $h(x) = \dfrac{x}{3x - 1}$, *determine* $h^(n)(x)$.

Solução.

Suponha $x \neq \dfrac{1}{3}$, então $h'(x) = \dfrac{-1}{(3x - 1)^2} = -(3x - 1)^{-2}$.

$h''(x) = -(-2)(3)(3x - 1)^{-3}$, $h"'(x) = -(-2)(-3)(3)^2(3x - 1)^{-4}$, $h^{(4)}(x) = -(-2)(-3)(-4)(3)^3(3x - 1)^{-5}$ isto é $h^{(4)}(x) = \dfrac{(-1)^4 \cdot 4! \cdot 3^3}{(3x - 1)^5}$

Mostra-se por indução que, $h^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n \cdot n! \cdot 3^{n-1}}{(3x - 1)^{n+1}}$.

5.4.3 Derivada da função inversa

Seja $f : I \longrightarrow J$ uma função monótona (crescente ou decrescente) estrita e sobrejetiva e I e J intervalos reais. Então existe, a função inversa $g : J \longrightarrow I$ e ambas são contínuas.

Propriedade 5.6. *Regra da derivada de função inversa.*

Se f é derivável em $x = b \in I$ e $f'(b) \neq 0$, então, g é derivável em $a = f(b)$ e temos: $g'(a) = \dfrac{1}{f'(b)} = \dfrac{1}{f'(g(a))}$.

Demonstração.

Com efeito, como para $y \neq a$ corresponde $g(y) \neq g(a)$, pois g é monótona estrita, assim teremos $g(y) - g(a) \neq 0$ e :

$$\frac{g(y) - g(a)}{y - a} = \frac{1}{\dfrac{y - a}{g(y) - g(a)}} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(b)}{x - b}}$$

Passando ao limite quando $y \to a$, como $x = g(y) \to b = g(a)$, pois g é contínua; e, sendo por hipótese $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b} = f'(b) \neq 0$, segue-se: $g'(a) = \lim\limits_{y\to a}\dfrac{g(y)-g(a)}{y-a} = \lim\limits_{y\to a}\dfrac{1}{\dfrac{y-a}{g(y)-g(a)}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}} = \dfrac{1}{f'(b)} = \dfrac{1}{f'(g(a))}$. $\square$

Exemplo 5.30.

Dada a função $g(x) = \sqrt[n]{x}$, $\quad n \in \mathbb{Z}$, calcule $g'(x)$.

Solução.

A função $g(x) = \sqrt[n]{x}$, definida por $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se n é ímpar ou g: $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ se n é par. Em qualquer caso $y = g(x) = \sqrt[n]{x}$ se, e somente se, $x = f(y) = y^n$. Como já estudamos anteriormente, se $f(y) = y^n$ então $f'(y) = ny^{n-1}$ e $f'(y) \neq 0$.

Logo, pela *Propriedade* (5.6),

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

para $x \neq 0$. Este resultado pode ser posto sob forma de expoente isto é, $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ então $g'(x) = \dfrac{1}{n}\cdot\left[\dfrac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}}\right] = \dfrac{1}{n}\cdot x^{\frac{1-n}{n}}$.

Exemplo 5.31.

Dada a função $g(x) = \log_a x$, para $x \in \mathbb{R}^+$, calcule $g'(x)$.

Solução.

Temos : $\quad y = g(x) = \log_a x$ se, e somente se $\;x = f(y) = a^y$.

Dado $f(y) = a^y$, pelo *Exemplo* (5.7) segue que $f'(y) = a^y \text{Ln}a \neq 0$ quando $a^y > 0$ e $a > 0$, logo pela regra de derivada de função inversa $g'(x) = \dfrac{1}{f'(y)} = \dfrac{1}{a^y\cdot \text{Ln}a} = \dfrac{1}{x\cdot \text{Ln}a}$ quando $x > 0$. No caso particular em que $g(x) = \text{Ln}x$ temos que: $g'(x) = \dfrac{1}{x\cdot \text{Ln}e} = \dfrac{1}{x}$, lembre que $\text{Ln}e = \log_e e = 1$.

Propriedade 5.7.

Se $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto $a \in A$, então existe uma função $N(h)$, tal que: $f(a+h) - f(a) = f'(a)\cdot h + N(h)\cdot h$ para todo $x = a+h \in A$ e $N(h) = 0 = N(0)$.

Demonstração.

De fato, sendo f derivável em $x = a$ temos: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ assim, podemos escrever na forma $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\right] = 0$.

Definimos: $N(h) = \begin{cases} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}, & \text{se,} \quad h \neq 0 \\ 0, & \text{se,} \quad h = 0 \end{cases}$

Tem, para $h \neq 0$, $\quad N(h) \cdot h = f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h.$

Portanto, $f(a+h) - f(a) = f'(a) \cdot h + N(h) \cdot h.$ □

5.4.4 Regra da cadeia

Propriedade 5.8. *Sejam $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $Im(f) \subseteq B$. Se f é derivável em $x = a \in A$ e g é derivável em $b = f(a) \in B$, então, $g \circ f$ é derivável em $x = a$ e temos: $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.*

A demonstração é exercício para o leitor, é suficiente aplicar a *Propriedade* (5.7)

Exemplo 5.32.

Dada a função $g(x) = \sqrt{x^2 - 15}$ calcular: $g''(x)$.

Solução.

Para a função $g(x) = \sqrt{x^2 - 15}$ temos $g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 15}}$, logo:

$$g''(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 15} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 15}}}{(\sqrt{x^2 - 15})^2} = \frac{-15}{(\sqrt{x^2 - 15})^3}$$

assim, $g''(x) = -\dfrac{15}{(\sqrt{x^2 - 15})^3}$.

Exemplo 5.33.

Dada $F(x) = (x^3 + 1)^2$, calcule $F'(x)$

Solução.

Observando que $F(x) = (x^3+1) \cdot (x^3+1)$ podemos aplicar a *Propriedade* (5.3), obtendo :

$$F'(x) = (x^3+1)'(x^3+1) + (x^3+1)(x^3+1)' = (3x^2)(x^3+1) + (x^3+1)(3x^2) = 6x^2(x^3+1)$$

Exemplo 5.34.

Dada $F(x) = (x^2 + 4x - 2)^{100}$, calcule $F'(x)$.

Solução.

A função $F(x)$ é composta $g \circ f$ das funções $g(y) = y^{100}$ e $f(x) = x^2 + 4x - 2$; desde que $g'(y) = 100y^{99}$ e $f'(x) = 2x + 4$, segue-se que

$$F'(x) = 100(f(x)) \cdot (4x - 2) = 100(x^2 + 4x - 2)^{99}(2x + 4)$$

Portanto, $F'(x) = 200(x^2 + 4x - 2)^{99}(x + 2)$.

Exemplo 5.35.

Dada $F(x) = a^{x^3-x^2+1}$, *calcule* $F'(x)$.

Solução.

A função $F(x)$ é composta gof das funções $g(y) = a^y$ e $f(x) = x^3 - x^2 + 1$, logo $g'(y) = a^y \cdot \text{Ln}a$ e $f'(x) = 3x^2 - 2x$.

Assim, $F'(x) = (gof)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) =$

$$[a^{f(x)} \cdot \text{Ln}a](3x^2 - 2x) = a^{x^3-x^2+1} \cdot [\text{Ln}a](3x^2 - 2x)$$

Portanto, $F'(x) = a^{x^3-x^2+1} \cdot (3x^2 - 2x) \cdot [\text{Ln}a]$.

Exemplo 5.36.

Dada $F(x) = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$, *calcule* $F'(x)$.

Solução.

Temos que $F(x)$ é a composta gof das funções $g(y) = \sqrt[q]{y}$ e $f(x) = x^p$, então $g'(y) = \dfrac{1}{q}y^{\frac{1}{q}-1}$ e $f'(x) = p \cdot x^{p-1}$. Assim, $F'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \dfrac{1}{q}[f(x)]^{\frac{1}{q}-1} \cdot px^{p-1} = \dfrac{1}{q}[x^p]^{\frac{1}{q}-1} \cdot px^{p-1} = \dfrac{p}{q}x^{\frac{p-q}{p}}$.

Portanto, $F'(x) = \frac{p}{q}x^{\frac{p-q}{p}}$.

Exemplo 5.37.

Dada a função $F(x) = \log_a(2x^3 + 4x^2 - 1)$ *calcule* $F'(x)$.

Solução.

A função $F(x)$ é composta gof das funções $g(y) = \log_a y$ e $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 1$ e temos $g'(y) = \dfrac{1}{y\text{Ln}a}$ e $f'(x) = 6x^2 + 8x$.

Logo, $F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \dfrac{2x(3x+4)}{(2x^3 + 4x^2 - 1)\text{Ln}a} \cdot (6x^2 + 8x)$.

Portanto, $F'(x) = \dfrac{2x(3x+4)}{\text{Ln}a}\left[\dfrac{1}{2x^3 + 4x^2 - 1}\right]$.

5.4.5 Derivada de uma função implícita

Nos problemas de aplicação, nem sempre é possível achar uma solução que descreva um modelo como uma função definida explicitamente em termos da variável independente. Algumas vezes a função é dada em forma implícita como por exemplo:

$$x^4 - x^3y + 3xy^2 - y^3 = 0$$

Aqui y é uma função que depende de x, mais não esta dada na forma explícita como uma função de x; isto é $y = f(x)$.

Seja $E(x, y) = 0$ uma equação de variáveis x e y. Se ao substituir y por $f(x)$ a equação transforma-se numa identidade então a função definida por $y = f(x)$ é chamada de função implícita determinada pela equação $E(x,\ y) = 0$.

Por exemplo, suponhamos a equação $E(x, y) = y^2 - x - 2 = 0$ determina implicitamente as funções $y = \sqrt{x+2}$ e $y = -\sqrt{x+2}$, podemos supor $y = f(x)$, então na equação $E(x,\ y) = 0$ resulta: $[f(x)]^2 - x - 2 = 0$ onde $[f(x)]^2 = x + 2$.

Derivando em relação à variável x temos $2f(x) \cdot f'(x) = 1$ assim $f'(x) = \dfrac{1}{2f(x)}$. Logo, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ ou $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$.

Este resultado podemos obter sem substituir y por $f(x)$, observe que $\dfrac{dy^2}{dx} = \dfrac{d(x+2)}{dx}$ então $2y \cdot y' = 1$ assim $y' = \dfrac{1}{2y}$. Se consideramos a igualdade $y = -\sqrt{x+2}$ o resultado permanece válido.

Em geral, se a equação $E(x,\ y) = 0$ define implicitamente a função $y = f(x)$, para obter $\dfrac{dy}{dx}$ é suficiente derivar a equação considerando a variável y como função de x e da equação resultante isolar a variável y; isto é:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dE}{dx}}{\frac{dE}{dy}}$$

Exemplo 5.38.

As seguintes funções definem implicitamente uma função $y = f(x)$*, determine a derivada* y'*.*

a) $x^2 + y^2 = 6$	**b)** $y^2 - 5x - 8 = 0$
c) $4x^2 - 16y^2 - 64 = 0$	**d)** $xy^2 - x^2y - y^3 = 9x$

Solução. **(a)**

Observe que $y = \pm\sqrt{6 - x^2}$ e, na equação $x^2 + y^2 = 6$ ao derivar em relação à variável x resulta $2x + 2y \cdot y' = 0$, onde $y' = -\dfrac{x}{y}$, isto é $y' = \mp\dfrac{x}{\sqrt{6 - x^2}}$.

Solução. **(b)**

Para e equação $y^2 - 5x - 8 = 0$ segue-se que $2yy' - 5 = 0$, logo $y' = \dfrac{5}{2y}$, como $y = \pm\sqrt{5x+8}$ então $y' = \pm\dfrac{5}{2\sqrt{5x+8}}$

Solução. **(c)**

Ao derivar a equação $4x^2 - 16y^2 - 64 = 0$, resulta $8x - 32y \cdot y' = 0$, onde $y' = \dfrac{x}{4y}$ e substituindo $2y = \pm\sqrt{2x^2 - 16}$ segue-se que $y' = \pm\dfrac{x}{2\sqrt{2x^2 - 16}}$

Solução. **(d)**

Derivando a equação $xy^2 - x^2y - y^3 = 9x$, temos $(y^2 + 2xyy') - (2xy + x^2y') - 3y^2 \cdot y' = 9$ então $y'(2xy - x^2 - 3y^2) = 9 - y^2 + 2xy$.

Portanto, $y' = \dfrac{9 - y^2 + 2xy}{2xy - x^2 - 3y^2}$.

Exemplo 5.39.

Dada a equação $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ *e* $y = f(x)$, *determine* $f'(1)$.

Solução.

Derivando implicitamente, $5x^4 + 5y^4 \cdot y' - 2y - 2xy' = 0$ onde $y'(5y^4 - 2x) = 2y - 5x^4$.

Na equação original quando $x = 1$ temos $y = 1$ e $y' = \dfrac{2y - 5x^4}{5y^4 - 2x}$, então $f'(1) = \dfrac{2(1) - 5(1)^4}{5(1)^4 - 2(1)} = -1$.

Portanto, $f'(1) = -1$.

Exemplo 5.40.

Determine a equação da reta tangente no ponto $(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ *à circunferência de centro na origem e raio a unidade.*

Solução.

A equação da circunferência é dada por $x^2 + y^2 = 1$. Sabemos que o coeficiente angular da reta tangente num ponto à circunferência, é dada pelo valor de sua derivada nesse ponto.

Derivando implicitamente e equação da curva, temos que:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Em particular, para o ponto $(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ resulta que $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \mathbf{1}$

Logo, $\quad y - (-\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = \mathbf{1}(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}) \quad \Rightarrow \quad y = x - \sqrt{2}$.

Portanto, a equação da reta pedida é, $y = x - \sqrt{2}$.

Exercícios 5-1

1. Aplicando a definição, calcular a primeira derivada para cada uma das seguintes funções e indicar seu domínio.

1. $f(x) = 6x^2 - 5x + 2$ **2**. $f(x) = x^3 - 3x^2$ **3**. $f(x) = \dfrac{2x+3}{3x-2}$

4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ **5**. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ **6**. $f(x) = \dfrac{x}{3-x}$

2. Dada $f(x) = \sqrt{x}$, calcule : **1.** $f(2)$; **2.** $f'(x)$.

3. Dada $f(x) = x^2 + 4x - 5$, calcule $f'(-1)$.

4. Dada $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, calcule: **1.** $f'(2)$; **2.** $f'(x)$.

5. Determine quais das seguintes funções são deriváveis nos pontos indicados:

1. $f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{se, } x \leq 3 \\ -x+5, & \text{se } x > 3 \end{cases}$ $a = 3$

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, & \text{se, } x < 3 \\ \sqrt{x+3}, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$ $a = 3$

3. $f(x) = \begin{cases} (1-x)^2, & \text{se, } x \geq 1 \\ \sqrt{1-x}, & \text{se } x < 1 \end{cases}$ $a = 1$

4. $f(x) = \mid x^2 - 4 \mid$ $a = 2$

5. $f(x) = \begin{cases} \mid x+2 \mid & \text{se, } x < 0 \\ 2 - x^2, & \text{se, } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 4x + 2, & \text{se } 2 \leq x \end{cases}$ $a = 0$ e $a = 2$.

6. Mostre que: **(1.)** Se f é função par, então $f'(x) = -f'(-x)$. **(2.)** Se f é função ímpar, então $f'(x) = f'(-x)$.

7. Define-se o ângulo entre as curvas $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ no ponto de interseção $M(x_0,\ y_0)$, ao menor ângulo compreendido entre as tangentes respectivas no ponto M. Este ângulo é determinado pela fórmula seguinte: $\tan\varphi = \dfrac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)}$.

1. Determine o ângulo que forma com o eixo das abscissas a tangente à curva $y = \dfrac{2x^5}{3} - \dfrac{x^3}{9}$ traçada no ponto $x = 1$.

2. Determine o ângulo compreendido entre as parábolas $y = 8 - x^2$ e $y = x^2$.

3. Determine o ângulo entre a parábola $y = 4 - x^2$ e o raio vetor do ponto $M(1,\ 3)$ desta linha.

8. Para cada uma das seguintes funções determine a primeira derivada.

1. $f(x) = \dfrac{3}{x^4}$	**2**. $f(x) = \dfrac{\mid x \mid}{1 + x^2}$
3. $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$	**4**. $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$
5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{4 - x^2}{(1 + x^2)^3}}$	**6**. $f(x) = (5 - x)\sqrt[7]{(x+5)^6}$
7. $f(x) = x^2 \mid x \mid^3$	**8**. $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$
9. $f(x) = \dfrac{4x + 6}{\sqrt{x^2 + 3x + 4}}$	**10**. $f(x) = \mid x^2 - 9 \mid$
11. $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt{\dfrac{2}{x}}$	**12**. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$
13. $f(x) = \sqrt[3]{(x^3 - \mid x \mid^3)^2}$	**14**. $f(x) = x\sqrt{x^2 - a^2} - \dfrac{a^2 x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$
15. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}}$	**16**. $f(x) = \dfrac{1}{8}\sqrt[n]{(1 + x^3)^8} - \dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(1 + x^3)^5}$
17. $f(x) = \dfrac{x}{a^2 \cdot \sqrt{a^2 + x^2}}$	**18**. $f(x) = (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^4$

9. Dada a função: $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se, } \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{se, } \quad x = 0 \end{cases}$ pede-se:

1. Provar que ela é contínua no ponto $x = 0$.

2. Calcular as derivadas laterais dessa função no ponto $x = 0$.

10. Suponha a função $y = f(x)$ seja derivável em x. Mostre o seguinte:

1. $\quad f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

2. $\quad f'(x) = \lim\limits_{k+h \to 0^+} \dfrac{f(x+h) - f(x-k)}{h+k}$

11. Seja $g(x) = x^n$ e $0 \leq k \leq n$; mostre que: $g^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$.

12. Mostre que se f é derivável em $x = a$, então $\mid f(x) \mid$ também é derivável em $x = a$ sempre que $f(a) \neq 0$. Dar um exemplo quando $f(a) = 0$.

13. Para cada uma das seguintes funções $f(x)$, determine $f(f'(xc))$.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **2.** $f(x) = x^2$

3. $f(x) = 17$ **4.** $f(x) = 17x$

14. Determine $f'(x)$ em términos de $g'(x)$ se:

1. $f(x) = g(x + g(a))$ **2**. $f(x) = g(x. \cdot g(a))$ **3**. $f(x) = g(x + g(x))$

4. $f(x) = g(x)(x - a)$ **5**. $f(x) = g(a)(x - a)$ **6**. $f(x + 3) = g(x^2)$

15. Determine as derivadas das funções inversas das seguintes funções:

1. $f(x) = x^2$ **2**. $g(x) = 3x^2 - x$ **3**. $h(x) = \dfrac{1}{x+1}$

4. $f(x) = (x + 2)^2$ **5**. $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$ **6**. $h(x) = (x^2 - 1)^2$

16. Seja $t = 2 - 3s + 3s^2$, determine $\dfrac{ds}{dt}$ mediante s

17. Seja $x = y^3 - 4y + 1$. Determine $\dfrac{dx}{dy}$.

18. Determine a primeira derivada implícita para as funções $y = f(x)$.

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ **2**. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ **3**. $x^3 - y^3 = 3axy$

4. $x^4 + y^4 = x^2y^2$ **5**. $x^y = y^x$ **6**. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$

19. Que ângulo forma com o eixo das abscissas com a reta tangente à curva $y = \dfrac{2x^5}{3} - \dfrac{x^2}{9}$, traçada no ponto com abscissa $x = x_0$?

20. Escrever as equações da reta tangente e normal à curva $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ no ponto $M(1, -1)$.

21. Mostre que a tangente à elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ no ponto $M(x_0, y_0)$ é dada pela igualdade $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$.

22. Mostre que a tangente à hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ no ponto $M(x_0, y_0)$ é dada pela igualdade $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$.

23. Determine as equações das tangentes á hipérbole $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{7} = 1$ que sejam perpendiculares á reta $2x + 4y - 3 = 0$

24. Determine a equação da reta tangente ao gráfico $f(x) = \dfrac{1}{x}$ de no ponto $(6,\ \dfrac{1}{6})$.

25. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $g(x) = \dfrac{8}{1+x}$ que passa pelo ponto $(-3,\ -4)$. Compare com o Exercício (24) e encontre uma explicação razoável para o coeficiente angular dessa reta.

26. Determine a equação da reta tangente à hipérbole de equação $2x^2 - 3y^2 - 12 = 0$, no ponto $(2\sqrt{3},\ 2)$

27. Calcule o coeficiente angular da reta normal ao gráfico da função $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$, no ponto $(3,\ g(3))$.

28. Determine a equação da reta normal à curva $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$, no ponto de abscissa 2.

29. Determine a declividade da reta tangente ao gráfico de $2x^3y - x^2 + 2xy - y^3 = -1$, no ponto $(1,\ 2)$.

30. Determine a equação da reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$ de modo que ela seja paralela à reta $8x - 4y - 1 = 0$.

31. Mostre que a reta normal à curva $x^3 + y^3 = 3xy$ no ponto $(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2})$, passa pela origem de coordenadas.

32. De 1988 a 2000, a receita (em milhões de reais) de uma companhia tinha como modelo matemático $R(t) = 0,87t^4 - 15,82t^3 + 147,96t^2 - 542,75t + 784,93$, onde $t = 5$ corresponde a 1988. Qual a taxa de variação da receita da companhia em 1993?

33. Uma empresa de eletrônicos utiliza 600 caixas de transistores por ano. O custo de armazenamento de uma caixa por um ano é de 45 centavos de real, e gastos em transporte de envio é de $R\$30,00$ por ordem. Quantas caixas deverá pedir a empresa em cada envio para manter o custo total mínimo?

34. Um produtor de laranjas em Goiânia estima que, se planta 60 laranjeiras numa determinada área, a produção média por árvore seria de 400 laranjas por árvore. O produtor sabe também que por cada árvore adicional de laranja plantado na mesma área, a média de produção de cada árvore diminui em 4 laranjas. Quantas árvores deve plantar o produtor para maximizar a produção total?

5.5 Derivada de funções transcendentes

5.5.1 Derivada das funções trigonométricas

As funções trigonométricas são deriváveis em seus respectivos domínios e temos a seguinte propriedade:

Propriedade 5.9.

a) *Se* $f(x) = \text{sen}x$, *então* $f'(x) = \cos x$.

b) *Se* $f(x) = \cos x$, *então* $f'(x) = -\text{sen}x$.

c) *Se* $f(x) = \tan x$, *então* $f'(x) = \sec^2 x$.

d) *Se* $f(x) = \cot x$, *então* $f'(x) = -\csc^2 x$.

e) *Se* $f(x) = \sec x$, *então* $f'(x) = \tan x \cdot \sec x$.

f) *Se* $f(x) = \csc x$, *então* $f'(x) = -\cot x \cdot \csc x$.

Demonstração. **(a)**

Considere $f(x) = \text{sen}x$ então, da definição de derivada temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}x \cdot \cos h + \text{sen}h \cdot \cos x - \text{sen}x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}x(\cos h - 1) + \text{sen}h \cdot \cos x}{h} = \text{sen}x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}h}{h} =$$

$$= (\text{sen}x).(0) + (\cos x)(1)$$

Portanto se, $f(x) = \text{sen}x$, então $f'(x) = \cos x$

Demonstração. **(b)**

Considere $f(x) = \cos x$ então, da definição de derivada temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \text{sen}h \cdot \text{sen}x - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \text{sen}h \cdot \text{sen}x}{h} = \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \text{sen}x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}h}{h} =$$

$$(\cos x).(0) - (\text{sen}x)(1)$$

Portanto se, $f(x) = \cos x$, então $f'(x) = -\text{sen}x$

Demonstração. **(c)**

Temos $f(x) = \tan x$, então $f(x) = \dfrac{\text{sen}x}{\cos x}$ da propriedade da derivada do quociente de duas funções, resulta $f'(x) = \dfrac{(\text{sen}x)'\cos x - \text{sen}x(\cos x)'}{\cos^2 x}$, isto é

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Portanto se, $f(x) = \tan x$, então $f'(x) = \sec^2 x$.

Propriedade 5.10.

Seja $u = u(x)$ função derivável em x, então:

a) *Se $f(x) = \text{sen}[u(x)]$, então $f'(x) = \{\cos[u(x)]\} \cdot u'(x)$.*

b) *Se $f(x) = \cos[u(x)]$, então $f'(x) = -\{\text{sen}[u(x)]\} \cdot u'(x)$.*

c) *Se $f(x) = \tan g[u(x)]$, então $f'(x) = \{\sec^2[u(x)]\} \cdot u'(x)$.*

d) *Se $f(x) = \cot[u(x)]$, então $f'(x) = -\{\csc^2[u(x)]\} \cdot u'(x)$.*

e) *Se $f(x) = \sec[u(x)]$, então $f'(x) = \{\tan[u(x)] \cdot \sec[u(x)]\} \cdot u'(x)$.*

f) *Se $f(x) = \csc[u(x)]$, então $f'(x) = -\{\cot[u(x)] \cdot \csc[u(x)]\} \cdot u'(x)$.*

Exemplo 5.41.

Determine a primeira derivada para as seguintes funções:

a) $f(x) = \text{sen}^2(5x-3)$ **b)** $g(x) = \cos^2(a-x)$ **c)** $h(x) = \text{sen}^3\left(\dfrac{x}{3}\right)$

d) $f(x) = \dfrac{x \cdot \text{sen}x}{1+x^2}$ **e)** $h(x) = \text{sen}^4 x \cdot \cos^3 x$.

Solução.

a) $f(x) = \text{sen}^2(5x-3)$, então $f'(x) = 2\text{sen}(5x-3)\cdot\cos(5x-3)\cdot 5$; isto é $f'(x) = 5\text{sen}(10x-6)$

b) $g(x) = \cos^2(a-x)$, então $g'(x) = -\{2\cos(a-x)\text{sen}(a-x)\}(-1)$, isto é $g'(x) = \text{sen}(2a-2x)$.

c) $h(x) = \text{sen}^3\left(\dfrac{x}{3}\right)$, então $h'(x) = \{3\text{sen}^2\left(\dfrac{x}{3}\right)\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)\}\cdot\dfrac{1}{3}$, logo $h'(x) = \text{sen}^2\left(\dfrac{x}{3}\right)\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$

d) $f(x) = \dfrac{x \cdot \text{sen}x}{1+x^2}$ então:

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)[x\cdot\text{sen}x]' - (1+x^2)'x\cdot\text{sen}x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{(1+x^2)[\text{sen}x + x\cdot\cos x] - (2x)[x\cdot\text{sen}x]}{(1+x^2)^2}$$

onde $f'(x) = \dfrac{(1-x^2)\text{sen}x + (1+x^2)x\cdot\cos x}{(1+x^2)^2}$

e) $h(x) = \text{sen}^4 x \cdot \cos^3 x$, então $h'(x) = [4\text{sen}^3 x \cdot \cos x]\cos^3 x + \text{sen}^4 x[3\cos^2 x \cdot (-\text{sen}x)]$; isto é $h'(x) = \text{sen}^3 x \cos^2 x(4\cos^2 x - 3\text{sen}^2 x)$.

Exemplo 5.42.

Sejam as funções: $f(x) = \tan^3 x + \sec^2 x - \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \text{sen}(\tan x + \sec x)$ *e* $h(x) = \sqrt[4]{\sec\sqrt{x}}$. *Determine* $f'(1)$, $g'(0)$ *e* $h'(1)$.

Solução.

a) Dada a função $f(x) = \tan^3 x + \sec^2 x - \dfrac{1}{x}$, então $f'(x) = 3\tan^2 x \cdot \sec^2 x + 2\sec x \cdot \tan x \cdot \sec x + \dfrac{1}{x^2}$ assim $f'(x) = \tan x \cdot \sec^2 x(3\tan x + 2) + \dfrac{1}{x^2}$ e $f'(1) = \tan 1 \cdot \sec^2 1 \cdot (3\tan 1 + 2) + \dfrac{1}{1^2} = \tan 1 \cdot \sec^2 1 \cdot (3\tan 1 + 2) + 1$.

Portanto, $f'(1) = \tan 1 \cdot \sec^2 1 \cdot (3\tan 1 + 2) + 1$

b) Para a função $g(x) = \text{sen}(\tan x + \sec x)$ temos

$$g'(x) = [\cos(\tan x + \sec x)] \cdot (\sec^2 x + \sec x \cdot \tan x) \quad \Rightarrow$$

$$g'(x) = \sec x \cdot [\cos(\tan x + \sec x)] \cdot (\sec x + \tan x) \quad \Rightarrow$$

$$g'(0) = \sec 0 \cdot [\cos(\tan 0 + \sec 0)] \cdot (\sec 0 + \tan 0) = \cos(1)$$

Portanto, $g'(0) = \cos 1$.

c) Se $h(x) = \sqrt[4]{\sec\sqrt{x}}$, então

$$h'(x) = \frac{1}{4}\sqrt[4]{(\sec\sqrt{x})^{-3}}[\sec\sqrt{x} \cdot \tan\sqrt{x}] = \frac{\sqrt[4]{\sec\sqrt{x}} \cdot \tan\sqrt{x}}{8\sqrt{x}}$$

Portanto, $h'(1) = \dfrac{\sqrt[4]{\sec\sqrt{x}} \cdot \tan\sqrt{x}}{8\sqrt{x}}$.

5.5.2 Derivada das funções trigonométricas inversas

Propriedade 5.11.

As funções trigonométricas inversas são deriváveis em seu domínio e temos:

a) *Se* $f(x) = \text{arcsen}x$, *então* $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $\quad | x |< 1$.

b) *Se* $f(x) = \arccos x$, *então* $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $\quad | x |< 1$.

c) *Se* $f(x) = \arctan x$, *então* $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $\quad x \in \mathbb{R}$.

d) *Se* $f(x) = \text{arccot}x$, *então* $f'(x) = -\dfrac{1}{1 + x^2}$, $\quad x \in \mathbb{R}$.

e) *Se* $f(x) = \text{arcsec}x$, *então* $f'(x) = \dfrac{1}{|\,x\,|\sqrt{x^2-1}}$, $\quad |\,x\,| > 1$.

f) *Se* $f(x) = \text{arccsc}x$, *então* $f'(x) = -\dfrac{1}{|\,x\,|\sqrt{x^2-1}}$, $\quad |\,x\,| > 1$.

Demonstração.(a)

Seja $f(x) = \text{arcsen}x$, e $y = f(x)$, então $x \in [-1,\ 1]$ e $y \in [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$.

Da igualdade $y = \text{arcsen}x$ segue que $x = \text{sen}y$ e $\dfrac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-\text{sen}^2 y}$ onde, $dx = \sqrt{1-\text{sen}^2 y}\cdot dy = \sqrt{1-x^2}\cdot dy$.

Portanto, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, isto é $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ para $|\,x\,| < 1$.

Demonstração.(e)

Seja $f(x) = y = \text{arcsec}x$, então da definição da função trigonométrica inversa,

$$x \in (-\infty,\ -1] \cup [1,\ +\infty) \quad \text{e} \quad y \in [0,\ \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2},\ \pi]$$

Podemos escrever $x = \sec y$, derivando em relação à variável y segue

$$\frac{dx}{dy} = \sec y \cdot \tan y = \sec y \cdot \sqrt{\sec^2 y - 1}$$

se $x \in [1,\ +\infty)$ então $y \in [0,\ \frac{\pi}{2})$ e $\tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1}$ isto é $dx = x \cdot \sqrt{\sec^2 y - 1}\cdot dy$; se $x \in (-\infty, -1]$ então $y \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ e $\tan y = -\sqrt{\sec^2 y - 1}$, logo $dx = \sec y \cdot \sqrt{\sec^2 y - 1}\cdot dy = |\,x\,| \cdot \sqrt{x^2-1}\cdot dy$.

Portanto, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{|\,x\,|\sqrt{x^2-1}}$, $\quad |\,x\,| > 1$.

Propriedade 5.12.

Seja $u = u(x)$ *função derivável respeito à variável* x, *então:*

a) *Se* $f(x) = \text{arcsen}[u(x)]$, *então* $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}$.

b) *Se* $f(x) = \text{arccos}[u(x)]$, *então* $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}$.

c) *Se* $f(x) = \text{arctan}[u(x)]$, *então* $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}$.

d) *Se* $f(x) = \text{arccot}[u(x)]$, *então* $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}$.

e) *Se* $f(x) = \text{arcsec}[u(x)]$, *então* $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{|\,u(x)\,|\sqrt{[u(x)]^2-1}}$.

f) *Se* $f(x) = \text{arccsc}[u(x)]$, *então* $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{\mid u(x) \mid \sqrt{[u(x)]^2 - 1}}$.

Exemplo 5.43.

Dada a função $f(x) = \text{arcsen}\sqrt{1-x^2}$ *quando* $\mid x \mid \leq 1$*; determine* $f'(x)$.

Solução.

Considere-se a função $u(x) = \sqrt{1-x^2}$ então $u'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, logo considerando $f(x) = \text{arcsen}[u(x)]$, e derivando em relação à variável independente x segue-se

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-[u(x)]^2}} \cdot u'(x) \quad \Rightarrow$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-[\sqrt{1-x^2}]^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

quando $0 <\mid x \mid< 1$; isto é $f'(x) = -\dfrac{x}{\mid x \mid \sqrt{1-x^2}}$ quando $0 <\mid x \mid< 1$.

Exemplo 5.44.

Sejam $y = \cos(x^2 + y^3)$ *e* $y = f(x)$*, determine* y'.

Solução.

Considere $u(x,\ y) = x^2 + y^3$, então $y = \cos[u(x,\ y)]$ e $y' = -\text{sen}[u(x,\ y)].\dfrac{du}{dx}$.

A equação $u(x,\ y) = 0$ determina a função implícita $y = f(x)$, logo

$$y' = -\text{sen}[u(x,\ y)] \cdot [2x + 3y^2 \cdot y'] = -2x \cdot \text{sen}(x^2 + y^3) - 3y^2 \cdot y' \cdot \text{sen}(x^2 + y^3)$$

onde $y' = \dfrac{-2x \cdot \text{sen}(x^2 + y^3)}{1 + 3y^2 \cdot \text{sen}(x^2 + y^3)}$.

Exemplo 5.45.

Dada a função $g(x) = \arctan\left[\dfrac{3a^2x - x^3}{a(a^2 - 3x^2)}\right]$*, determine* $g'(x)$.

Solução..

Observe que $u(x) = \left[\dfrac{3a^2x - x^3}{a(a^2 - 3x^2)}\right]$ logo, derivando em relação a x temos:

$$u'(x) = \frac{(3a^2 - 3x^2)[a(a^2 - 3x^2)] - (3a^2x - x^3)(-6ax)}{a^2(a^2 - 3x^2)^2} = \frac{3a(x^4 + 2a^2x^2 + a^4)}{a^2(a^2 - 3x^2)^2}$$

Por outro lado $g(x) = \arctan[u(x)]$, então $g'(x) = \dfrac{1}{1 + [u(x)]^2} \cdot u'(x)$ isto é

$$g'(x) = \frac{1}{1 + \left[\frac{3a^2x - x^3}{a(a^2 - 3x^2)}\right]^2} \cdot \frac{3a(x^4 + 2a^2x^2 + a^4)}{a^2(a^2 - 3x^2)^2} = \frac{3a(x^2 + a^2)^2}{a^2(a\ 2 - 3x^2)^2 + (3a^2x - x^3)^2}$$

Assim $g'(x) = \dfrac{3a}{a^2 + x^2}$.

5.5.3 Derivada das funções: Exponencial e logarítmica

Propriedade 5.13.

As funções exponencial e logarítmica são deriváveis em seus correspondentes domínios, e temos:

a) *Se* $f(x) = a^x, \quad x \in \mathbb{R}$, *então* $f'(x) = a^x \cdot \text{Ln}a, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) *Se* $f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$, *então* $f'(x) = e^x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

c) *Se* $f(x) = \log_a x, \quad x > 0$, *então* $f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \text{Ln}a}, \quad \forall x > 0$.

d) *Se* $f(x) = \text{Ln}x, \quad x > 0$, *então* $f'(x) = \dfrac{1}{x}, \quad \forall\, x > 0$.

e) *Se* $f(x) = \text{Ln} \mid x \mid, \quad x \neq 0$, *então* $f'(x) = \dfrac{1}{x}, \quad \forall\, x \neq 0$.

Demonstração. **(a)**

Se $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ então $a > 0$ ou $a \neq 1$. Do Exemplo 5.7 temos: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^h - 1}{h} = a^x \text{Ln}a$.

Demonstração. **(b)**

Se $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, então é um caso particular de $a = e$, então pelo mostrado na parte **a)** temos $f'(x) = e^x \cdot \text{Ln}e = e^x$.

Demonstração. **(c)**

Se $f(x) = \log_a x$, $x > 0$, então $y = \log_a x$ se e somente se $x = a^y$ derivando implicitamente esta última igualdade em relação a x temos: $1 = a^y \cdot y' \cdot \text{Ln}a$, logo $y' = \dfrac{1}{a^y \cdot \text{Ln}a}$; isto é: $f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \text{Ln}a}$.

Propriedade 5.14.

Se $u = u(x)$ *e* $v = v(x)$ *são funções deriváveis respeito à variável* x, *temos:*

a) *Se* $f(x) = a^{u(x)}$, *então* $f'(x) = a^{u(x)} \cdot \text{Ln}a \cdot u'(x)$.

b) *Se* $f(x) = e^{u(x)}$, *então* $f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$.

c) *Se* $f(x) = \log_a[u(x)], \quad u(x) > 0$, *então* $f'(x) = \dfrac{1}{u(x) \cdot \text{Ln}a} \cdot u'(x)$.

d) *Se* $f(x) = \text{Ln}[u(x)], \quad u(x) > 0$, *então* $f'(x) = \dfrac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$.

e) *Se* $f(x) = [u(x)]^{v(x)}$, *então:* $f'(x) = [u(x)]^{v(x)}[v'(x) \cdot \text{Ln}[u(x)] + \dfrac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x)]$

Demonstração. **(e)**

A demonstração de **(a), (b), (c)** e **(d)** é imediata.

Seja $f(x) = u(x)^{v(x)}$ então $f(x) = e^{\text{Ln}[u(x)]^{v(x)}} = e^{v(x)\cdot\text{Ln}[u(x)]}$, logo

$$f'(x) = e^{\text{Ln}[u(x)]^{v(x)}} \cdot (v(x) \cdot \text{Ln}[u(x)])' =$$
$$= e^{\text{Ln}[u(x)]^{v(x)}} v'(x) \cdot \text{Ln}[u(x)] + \frac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x).$$

Assim, $f'(x) = [u(x)]^{v(x)}[v'(x) \cdot \text{Ln}[u(x)] + \dfrac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x)]$.

Exemplo 5.46.

Determine a derivada da função $y = \sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$.

Solução.

Da propriedade da função logaritmo temos que $\text{Ln}y = \dfrac{1}{2}[\text{Ln}x + \text{Ln}(x-1) - \text{Ln}(x-2)]$;
derivando $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x-2}]$.

Portanto, $y' = \dfrac{y}{2}[\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x-2}]$, isto é $y' = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}$.

Exemplo 5.47.

Determine a derivada da seguinte função: $y = \left[1 + \dfrac{1}{x}\right]^x$.

Solução.

Em modo de logaritmo temos $\text{Ln}y = x \cdot \text{Ln}\left[1 + \dfrac{1}{x}\right] = x[\text{Ln}(x+1) - \text{Ln}x]$, calculando a derivada primeira $\dfrac{y'}{y} = [\text{Ln}(x+1) - \text{Ln}x] + x \cdot \left[\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x}\right] = \text{Ln}\left[1 + \dfrac{1}{x}\right] - \dfrac{1}{1+x}$.

Portanto, $y' = y[\text{Ln}\left[1 + \dfrac{1}{x}\right] - \dfrac{1}{1+x}] = \left[1 + \dfrac{1}{x}\right]^x \cdot [\text{Ln}\left[1 + \dfrac{1}{x}\right] - \dfrac{1}{1+x}]$.

5.5.4 Derivada das equações paramétricas

O gráfico de uma curva $y = f(x)$ é composto pelos pontos $P(x, y)$ no plano cartesiano. Por exemplo, a trajetória de uma partícula em movimento no plano é descrita por um par de equações em função do tempo na forma $x = x(t)$ e $y = y(t)$; estas equações descrevem o melhor o movimento, a posição da partícula $(x, y) = (x(t), y(t))$ em qualquer instante t.

Por exemplo, $x = \cos t$, $y = \text{sen}t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ descreve o deslocamento de uma circunferência no sentido anti-horário.

Definição 5.9. *Curva parametrizada.*
Se x e y, são dadas como funções $x = x(t)$ e $y = y(t)$ ao longo de um intervalo de valores de t, então o conjunto de pontos $(x, y) = (x(t), y(t))$ definido por essas equações é uma curva parametrizada. As equações são equações paramétricas para a curva.

A variável t é um parâmetro para a curva, e seu domínio é chamado "intervalo do parâmetro", quando $a \leq t \leq b$, o ponto $(x(a), y(a))$ é o ponto inicial e o ponto $(x(b), y(b))$ é o ponto final.

Uma curva parametrizada $x = x(t)$ e $y = y(t)$ será derivável em t, se x e y forem deriváveis em t. Estas derivadas num ponto estão relacionadas com a regra da cadeia

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Observação 5.4. *Curva parametrizada.*
Se as três derivadas existem e $\dfrac{dx}{dt} \neq 0$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Exemplo 5.48.
Determine $\dfrac{d^2y}{dt^2}$, em função de t, se $x = 2t - t^2$ e $y = 3t - t^3$
Solução.

Tem-se que $\quad y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{3(1-t^2)}{2(1-t)} = \dfrac{3(1+t)}{2}$.

Observe que $\quad \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy/dx}{dx/dt}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\frac{3(1+t)}{2}}{2(1-t)}\right)$, então

$$= \frac{3}{4}\frac{d}{dt}\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{(1-t)^2} = \frac{3}{2(1-t)^2}$$

Portanto, $\quad \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{3}{2(1-t)^2}$.

Exercícios 5-2

1. Para cada uma das seguintes funções, determine sua primeira derivada em relação à variável x.

1.	$y = \text{sen}^2(3-5x)$	**2.**	$y = \cos^2(x-a)$	**3.**	$y = \text{sen}^3\left[\dfrac{x}{3}\right]$
4.	$y = \dfrac{x\cdot\text{sen}x}{1+x^2}$	**5.**	$y = \text{sen}^4x\cdot\cos^3 x$	**6.**	$y = \dfrac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$
7.	$y = \dfrac{\tan x}{\text{sen}2x}$	**8.**	$y = \dfrac{\text{sen}x + \cos x}{\text{sen}x - \cos x}$	**9.**	$y = \dfrac{\sec x - \tan x}{\sec x + \tan x}$
10.	$y = \dfrac{\text{sen}2x}{\tan x}$	**11.**	$y = \text{sen}(nx)\cdot\text{sen}^n x$	**12.**	$y = \dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$
13.	$y = \dfrac{[\text{sen}(nx)]^m}{[\cos(mx)]^n}$	**14.**	$y = \dfrac{\cot x - 1}{\tan x + 1}$	**15.**	$y = \dfrac{\csc x + \cot x}{\csc x - \cot x}$
16.	$y = \text{sen}(\cos x)$	**17.**	$y = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$	**18.**	$y = \dfrac{\sqrt{\cos 2x} + 1}{2}$

19. $y = \dfrac{\sec(1-x)}{\sec(1-x)+\tan(1-x)}$ **20.** $y = \sqrt{1-\text{sen}x} - \sqrt{1+\text{sen}x}$

2. Determine constantes A e B de modo que $y = A\cdot\text{sen}3x - B\cdot\cos 3x$, cumpra a igualdade: $y' + 5y = 18\cos 3x$.

3. Determine a derivada implicitamente para cada uma das seguintes funções:

1.	$y = \cos(x-y)$	**2.**	$\tan y = 3x^2 + \tan(x+y)$
3.	$\cot(xy) + xy = 0$	**4.**	$\sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} = 2$
5.	$\cos(xy) = y\cdot\tan(xy)$	**6.**	$y = \text{sen}^2 x + \cos^2 y$
7.	$y = \text{sen}(\cos(x^2+y^2))$	**8.**	$\text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y) = 1$
9.	$\cos(x+y) = y\cdot\text{sen}x$	**10.**	$y = \text{sen}(x+y)$

4. Desenhar o gráfico das seguintes funções:

1.	$y = x\cdot\arctan x$	**2.**	$y = x - 2\arctan x$	**3.**	$y = \text{arcsec}(x^2)$
4.	$y = \text{arcsen}(x^2+3x-10)$	**5.**	$y = \arccos\sqrt{x}$	**6.**	$y = \arccos\sqrt{1-x^2}$

5. A relação $y = \dfrac{\text{arcsen}x}{\sqrt{1-x^2}}$, cumpre a equação diferencial : $(1-x^2).y' - xy - 1 = 0$? Justifique sua resposta.

6. Calcular $f'(x)$ e seu domínio para a função: $f(x) = \begin{cases} x^2\cdot\text{sen}\dfrac{1}{x^2}, & \text{se, } x\neq 0 \\ 0, & \text{se, } x = 0 \end{cases}$

7. Derivar $y = \text{Ln}(x)$ em relação a $u = e^{\text{sen}x}$.

8. Determine a primeira derivada para cada uma das seguintes funções:

1.	$y = \arctan\left[\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$	**2.**	$y = \arctan\left[\dfrac{2x}{1-x^2}\right]$
3.	$y = \text{arcsec}\left[\dfrac{1}{2x^2-1}\right]$	**4.**	$y = (x+a)\cdot\arctan\left[\dfrac{\sqrt{x}}{a}\right] - \sqrt{ax}$
5.	$y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left[\dfrac{\tan x}{\sqrt{2}}\right]$	**6.**	$y = \arccos\left[\dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right]$
7.	$y = \arctan\left[\dfrac{2}{x}\right] + \arctan\left[\dfrac{x}{2}\right]$	**8.**	$y = \text{arcsen}\left[\dfrac{x}{a}\right] + \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$
9.	$y = \dfrac{2}{3}\arctan\left[\dfrac{5\tan\frac{x}{2}+4}{3}\right]$	**10.**	$y = \arctan\left[\dfrac{3\text{sen}x}{4+5\cos x}\right]$
11.	$xy = \arctan\left[\dfrac{y}{x}\right]$	**12.**	$\sqrt{x^2+y^2} = b\cdot\arctan\left[\frac{y}{x}\right]$
13.	$x = \text{arcsen}(1-y)$	**14.**	$\arccos(xy) = \text{arcsen}(x+y)$
15.	$\sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = 8$	**16.**	$\sqrt{\dfrac{y}{x}} + \sqrt{\dfrac{x}{y}} = 2$

9. Determine expressões comuns para as derivadas de ordem n das seguintes funções:

1.	$y = \text{sen}ax + \cos bx$	**2.**	$y = \text{sen}^2 x$	**3.**	$y = \dfrac{1}{ax+b}$
4.	$y = \text{sen}^4 x + \cos^4 x$	**5.**	$y = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$	**6.**	$y = \dfrac{x}{x^2-1}$

10. Seja $f(x) = x^2 \cdot \text{sen}\dfrac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Suponhamos que $g(x)$ e $h(x)$ sejam funções tais que: $h'(x) = \text{sen}^2(\text{sen}(x+1))$, $h(0) = 3$, $g'(x) = f(x+1)$ e $g(0) = 0$. Achar:

    a) $(foh)'(0)$ **b)** $(gof)'(0)$ **c)** $k'(x^2)$, onde $k(x) = h(x^2)$.

11. Determine $\dfrac{dy}{dx}$ para cada uma das seguintes funções:

1.	$y = \sqrt{x}\text{arcsen}(\sqrt{x}) + \sqrt{1-x^2}$	**2.**	$y = \text{Ln}\left[\dfrac{2\text{Ln}^2\text{sen}x + 3}{2\text{Ln}^2\text{sen}x - 3}\right]$
3.	$y = \text{Ln}\left[\dfrac{\sqrt{4\tan x+1} - 2\sqrt{\tan x}}{\sqrt{4\tan x+1} + 2\sqrt{\tan x}}\right]$	**4.**	$y = \arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$
5.	$y = \text{Ln}[x.\text{sen}x + \cos x + \sqrt{(x\cdot\text{sen}x + \cos x)^2 + 1}]$		

12. Seja $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $\dfrac{p}{q}$ se $x \notin Q$. Mostre que f não é diferenciável em nenhum $a \in \mathbb{R}$

13. Sejam as funções $y = x^3 \cdot \text{Ln}(x)$ e $z = \text{Ln}(x)$. Estabeleça uma relação entre $y^{(n)}$ e $z^{(n-3)}$ para $n \geq 4$.

14. Mostre que a função $y = \dfrac{x-3}{x+4}$ cumpre a relação: $2(y')^2 = (y-1)y''$.

15. Mostre que a função $y = (x^2-1)^n$ cumpre a relação:

$$(x^2-1)y^{(n+2)} + 2xy^{(n+1)} - 2(n+1)y^{(n)} = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$$

16. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções de x. Considere as seguintes igualdades: $y = f(x) - g'(x)$, $z = g(x) + f'(x)$, $Y = f'(x)\text{sen}x - g'(x)\cos x$ e $Z = f'(x)\cos x + g'(x)\text{sen}x$. Mostre que verifica-se a identidade: $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]^2 + \left[\dfrac{dz}{dx}\right]^2 = + \left[\dfrac{dY}{dx}\right]^2 + \left[\dfrac{dZ}{dx}\right]^2$.

17. Mostre que a função $y = (x+\sqrt{x^2+1})^k$ cumpre a relação: $(x^2+1)y''+x\cdot y'-k^2\cdot y = 0$.

18. Mostre que a função $y = A\cdot\text{sen}(\varpi t + \varpi_0) + B\cdot\cos(\varpi t + \varpi_0)$ onde $A,\ B, \varpi$ e ϖ_0 são constantes; cumpre a relação: $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \varpi^2 y = 0$.

19. Mostre que se $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2gx + 2fy + h = 0$ temos:

   1. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax+by+g}{bx+cy+f}$ **2.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{A}{(bx+cy+f)^3}$

   Onde A é constante que não depende de x e y.

20. Sejam u, v, z três funções de variável x tais que: $y = \dfrac{d}{dx}\left(u\cdot\dfrac{dy}{dx}\right)$, $z = \dfrac{d}{dx}\left(u\cdot\dfrac{dz}{dx}\right)$. Mostre que $\dfrac{d}{dx}\left[u\left(y\cdot\dfrac{dz}{dx} - z\cdot\dfrac{dy}{dx}\right)\right] = 0$.

21. Verificar que o determinante $D(x)$ não depende de x (é uma função constante):

$$D(x) = \begin{vmatrix} \cos(x+a) & \text{sen}(x+a) & 1 \\ \cos(x+b) & \text{sen}(x+b) & 1 \\ \cos(x+c) & \text{sen}(x+c) & 1 \end{vmatrix}$$

22. Determine a derivada n-ésima das seguintes funções:

   1. $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ **2.** $y = \dfrac{3x+2}{x^2-4}$ **3.** $y = \dfrac{mx+p}{x^2-a^2}$

23. Determine as derivadas n-ésima para as funções:

1.	$y = \text{Ln}(x+1)$	**2.**	$y = \arctan(x)$	**3.**	$y = \text{sen}^3x + \cos^3 x$
4.	$y = \text{sen}^2x$	**5.**	$y = \text{sen}^4x + \cos^4 x$	**6.**	$y = \text{sen}x \cdot \text{sen}2x \cdot \text{sen}3x$

24. Prove que a função: $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \text{sen}\dfrac{1}{x}, & \text{se}, \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{se}, \quad x = 0 \end{cases}$ é derivável em $x = 0$ e $f'(0) = 0$.

25. Se $y = a \cdot \cos x + b \cdot \text{sen}x$ e $z = a \cdot \text{sen}x + b \cdot \cos x$, determine condições para que $y^{(m)}z^{(n)} = y^{(n)}z^{(m)}$, onde $m, n \in \mathbb{N}$.

26. Prove que a função: $f(x) = \begin{cases} x \cdot \text{sen}\dfrac{1}{x}, & \text{se}, \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{se}, \quad x = 0 \end{cases}$ não é derivável nem à esquerda nem à direita no ponto $x = 0$.

27. Mostre por recorrência que a derivada de ordem n de:

   1. $y = x^{n-1} \cdot \sqrt[x]{e}$ é $y^{(n)} = (-1)^n \dfrac{\sqrt[x]{e}}{x^{n+1}}$

   2. $y = e^{x \cdot \cos\alpha} \cdot \cos(x \cdot \; sen(\alpha))$ é $y^{(n)} = e^{x \cdot \cos\alpha} \cdot \cos[x \cdot \text{sen}\alpha + n \cdot \alpha]$

   3. $y = e^{ax} \cdot \text{sen}(bx + c)$ é $y^{(n)} = \sqrt{(a^2 + b^2)^n} \cdot e^{ax}[\text{sen}(bx + c) + n \cdot \arctan(\dfrac{b}{a})]$

28. Mostre que, quando $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(\dfrac{x}{a})$, a n-ésima derivada de $y = \dfrac{1}{a^2 + x^2}$ é $y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \dfrac{\text{sen}(n+1)\theta}{a\sqrt{(a^2 + x^2)^{n+1}}}$.

29. Mostre que a função $y = e^x + 2e^{2x}$ satisfaz a equação diferencial: $y''' - 6y'' + 11y' = 6y$.

30. Mostre que a função $y = x^3$ satisfaz a equação diferencial: $y^{(v)} + y^{(iv)} + y''' + y'' + y' + y = x^3 + 3x^2 + 6x + 6$.

31. Calcular a primeira derivada em $x = 0$ para a função

$$f(x) = \sqrt[3]{\text{Ln}(\text{arcsen}x + \arccos x)^2} + \frac{\sqrt[5]{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}$$

32. Um clube universitário levanta fundos vendendo barras de chocolate a R\$1, 00 cada. O clube paga R\$0, 60 por cada barra e tem um custo anual fixo de R\$250, 00. Escreva o lucro L como função de x, número de barras de chocolate vendidas. Mostre que a derivada da função lucro é constante e que é igual ao lucro obtido em cada barra vendida.

33. A receita R (em milhões de reais) de uma determinada empresa de 1.989 a 1.993 admite o modelo $R(t) = -5,1t^3 + 25,6t^2 - 29,3t + 45,2$, onde $t = 0$ representa o tempo em 1.989. **a)** Achar a inclinação do gráfico em 1.990 e em 1.989. **b)** Quais são as unidades de inclinação do gráfico?.

5.6 Aproximação local de uma função

Seja f uma função derivável no ponto $x = a$ e consideremos a função afim definida por: $T_m(x) = f(a) + m(x - a)$ onde m é número real.

Toda função afim $T_m(x)$ numa vizinhança de $x = a$, é uma aproximação para a função $f(x)$, no sentido que o erro cometido nessa aproximação tende a zero quando $(a + \Delta x) \to a$ ou $\Delta x \to 0$ (*Figura* (5.5)). De fato, se expressamos este erro em termos de Δx e fazendo $E(\Delta x)$ como:

$$E(\Delta x) = f(a + \Delta x) - T_m(a + \Delta x)$$

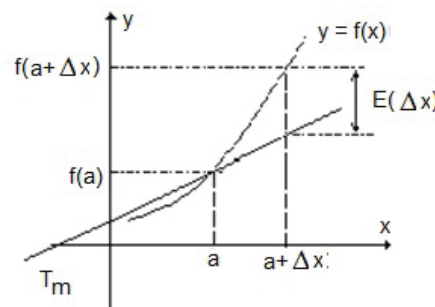



Figura 5.5:

Como f é derivável em $x = a$, então f é contínua em $x = a$ o que implica que:

$$\lim_{\Delta x \to 0}[f(a + \Delta x) - T_m(a + \Delta x)] = \lim_{\Delta x \to 0} E(\Delta x) = 0$$

isto significa que para valores pequenos de Δx temos $f(a + \Delta x)$ bastante próximo de $T_m(a + \Delta x)$

Propriedade 5.15.

Se f é derivável em $x = a$ e

$$E(\Delta x) = f(a + \Delta x) - T_m(a + \Delta x)$$

então $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{E(\Delta x)}{\Delta x} = 0$ *se, e somente se* $m = f'(x)$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Por hipótese $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{E(\Delta x)}{\Delta x} = 0$ e $T_m(a + \Delta x) = f(a) + m(\Delta x)$, então

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a) - m(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \cdot m = f'(a) - m$$

Por tanto $m = f'(a)$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, por hipótese $m = f'(a)$, da definição de derivada num ponto, temos que o limite :

$$0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a) - f'(a)\Delta x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a) - m(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{E(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

Observação 5.5.

Desta Propriedade (5.15), *observamos que existe uma única função afim que aproxima a* $f(x)$ *com a condição* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{E(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$

Esta aproximação é exatamente a reta tangente à curva $f(x)$ no ponto $x = a$. Isto significa que qualquer função derivável no ponto $x = a$, pode ser aproximada localmente por um polinômio de grau um.

Exemplo 5.49.

Numa vizinhança do ponto $x = 3$, *determine o polinômio que aproxima localmente à função* $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Solução.

Para a função $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ temos $g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, então $g'(3) = \dfrac{3}{\sqrt{8}}$, assim o polinômio que aproxima é $P(x) = g(3) + g'(3)(x - 3)$ isto é $P(x) = \sqrt{8} + \dfrac{3}{\sqrt{8}}(x - 3)$.

Observe que $P(3,01) = 2,8391$ e $g(3,01) = 2,8390$ o erro $E(0,01) = 0,0001$ é mínimo.

5.6.1 Função diferenciável e diferencial de uma função

Definição 5.10.

Seja $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função e* $a \in A$ *um ponto de acumulação de* A. *Se diz que* f *é diferenciável no ponto* $x = a$, *se:*

$$f(a + \Delta x) = f(a) + m \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x) \tag{5.6}$$

onde $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ *se* $\Delta x \to 0$ *e* $\varepsilon(0) = 0$.

A expressão $m \cdot \Delta x$ da igualdade (5.6) denomina-se *diferencial de* f *no ponto* $x = a$, *correspondente ao incremento* Δx e denota-se $d(a, \Delta x)$ ou simplesmente $df(a)$. Em geral a $df(x)$ chama-se *diferencial de* $f(x)$.

Propriedade 5.16.

Se f *é diferenciável no ponto* $x = a$, *a constante* m *que aparece na Definição* (5.10) *é única.*

Demonstração.

Suponhamos que existam $m \neq m_1$ e $\varepsilon_1(\Delta x)$ tais que:

$$f(a+\Delta x) = f(a) + m_1 \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \varepsilon_1(\Delta x) \tag{5.7}$$

Com $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1(\Delta x) = 0$. Substraindo (5.6) de (5.7) obtém-se :

$$0 = (m - m_1)\Delta x + [\varepsilon(\Delta x) - \varepsilon_1(\Delta x)]\Delta x$$

Para $\Delta x \neq 0$, $m - m_1 = \varepsilon(\Delta x) - \varepsilon_1(\Delta x)$, no limite a ambos os membros quando $\Delta x \to 0$ obtémos $m = m_1$, isto significa que a constante é única.

Propriedade 5.17.

A função $f(x)$ é diferenciável no ponto $x = a$ se, e somente se f é derivável no ponto $x = a$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Por hipótese, $f(x)$ é diferenciável no ponto $x = a$, então

$$f(a+\Delta x) = f(a) + m(\Delta x) + \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x)$$

como m é constante e $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$, dividindo por $\Delta x \neq 0$ e calculando o limite quando $\Delta x \to 0$ obtém-se:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [m - \varepsilon(\Delta x)] = m$$

então $m = f'(a)$; isto é f é derivável em $x = a$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, é a *Propriedade* (5.7). $\square$

Exemplo 5.50.

Seja $f(x) = x$ função identidade, calcular o diferencial de $f(x)$.

Solução.

$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$ como $f'(x) = 1$ e $f(x) = x$, obtemos $dx = \Delta x$.

Isto significa que o "*incremento da variável independente $x(\Delta x)$ é igual a seu diferencial dx*".

Exemplo 5.51.

Seja $f(x) = \dfrac{1}{4}x^3$, calcular o diferencial de f no ponto $x = 2$; Qual é o diferencial de f(x)?

Solução.

Temos $d(2,\ \Delta x) = f'(2) \cdot \Delta x$, sendo $f'(x) = \dfrac{3}{4}x^2$, logo $f'(2) = 3$; assim o diferencial de f em $x = 2$, é $d(2, \Delta x) = f'(2) \cdot \Delta x = 3\Delta x$.

Por outro lado, o diferencial de $f(x)$ é $df(x) = f'(x) \cdot \Delta x = \dfrac{3}{2}x \cdot \Delta x$.

Observação 5.6.

Considerando os resultados anteriores, se $y = f(x)$ temos:

a) $df(a) = f'(a) \cdot dx$ **b)** $dy = df(x) = f'(x) \cdot dx$ **c)** $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$.

5.6.2 Propriedades do diferencial de uma função

Propriedade 5.18.

Sejam $u = f(x)$ e $v = g(x)$ funções diferenciáveis e c uma constante, então:

a) $d(c) = 0$. **b)** $d(cu) = cd(u)$

c) $d(u + v) = d(u) + d(v)$ **d)** $d(u.v) = u.d(v) + v.d(u)$

e) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \cdot d(u) - u \cdot d(v)}{v^2}$

A demonstração desta propriedade é exercício para o leitor.

Exemplo 5.52.

Seja $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, determine df.

Solução.

Do fato $df(x) = f'(x) \cdot dx$ temos $df(x) = (\sqrt{x^2 + 5})' \cdot dx = \dfrac{x \cdot dx}{\sqrt{x^2 + 5}}$.

Exemplo 5.53.

Dado $f(x) = x^2 + 3$, determine Δf e df quando $x = 2$ e $\Delta x = dx = 0,5$. Qual é o erro $E(\Delta x)$ quando utilizamos df para aproximar Δf?

Solução.

Para $a = 2$ e $\Delta x = 0,5$ temos:

$$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f(2,5) - f(2) = 2,25$$

$$df(2,5) = f'(2)dx = 2(2) \cdot (0,5) = 2$$

Logo, $E(\Delta x) = \Delta f - df = 2,25 - 2 = 0,25$.

5.6.3 Significado geométrico do diferencial

Reescrevendo a definição de função diferenciável obtemos:

$$f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a) \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x)$$

onde:

$$\varepsilon(\Delta x) = \begin{cases} \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}, & \text{se}, \quad \Delta x \neq 0 \\ 0, & \text{se}, \quad \Delta x = 0 \end{cases}$$

Isto significa que se f é diferenciável em $x = a$, e que f é localmente aproximada por sua reta tangente:

$$T_m(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Sejam $P(a,\ f(a))$ e $Q(a+\Delta x,\ f(a+\Delta x))$ os pontos sobre o gráfico de f (*Figura* (5.6)). A reta paralela ao eixo y que passa por Q intercepta à reta tangente $T_m(x)$ no ponto S e à reta paralela ao eixo x que passa por P a intercepta no ponto R.

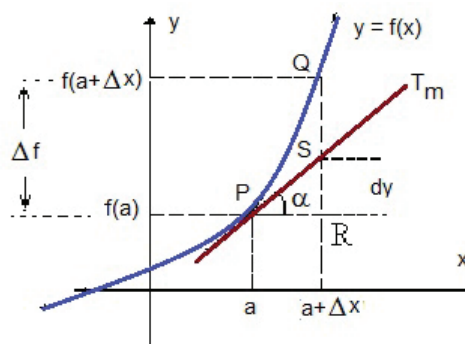



Figura 5.6:

Temos $\tan\alpha = \dfrac{\overline{RS}}{\overline{PR}}$, porém $\overline{PR} = \Delta x = dx$ e $\tan\alpha = f'(a)$ onde, $\overline{RS} = f'(a)dx = d(f,\ \Delta x)$. Assim obtém-se que $\Delta x \to 0$ e $\Delta y \approx dy$.

Portanto, $f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)dx$.

Observação 5.7.

Se $y = f(x)$*, sendo* $\Delta y = f(a + \Delta x) \approx f(a)$ *e* $\Delta y \approx dy$ *deduzimos que* dy *é aproximadamente a variação que sofre a função* f *quando* x *varia de* a *até* $a + \Delta x$*.*

Exemplo 5.54.

Estima-se em $12cm$ *o raio de uma esfera, com um erro máximo de* $0,006cm$*. Estime o erro máximo no cálculo do volume da esfera.*

Solução.

Seja r o raio da esfera, seu volume é dado por $V(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$; denotando dr o diferencial do raio; temos $dV = V'(r)dr$, isto é $dV = 4\pi r^2 dr$, fazendo $r = 12$, $dr = \pm 0,06$, assim, $dV = 4\pi(12)^2(\pm 0,006) = \pm 10,857cm^3$.

O erro máximo na medida do volume, devido ao erro na medida do raio é $10,857cm^3$.

Exemplo 5.55.

Aproximar mediante diferenciais a raiz quinta de 3127*.*

Solução.

Seja $f(x) = \sqrt[5]{x}$ e $a = 3125$, temos $f(a) = \sqrt[5]{3125} = 5$. Se $a + \Delta x = 3127$, então $\Delta x = 2 = dx$.

Como $f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)dx$ então, $f(3127) \approx f(3125) + f'(3125).(2)$. Isto é

$$\sqrt[5]{3127} \approx \sqrt[5]{3125} + 2(\frac{1}{5\sqrt[5]{3125^4}}) = 5 + 0,0032 = 5,0032$$

Portanto $\sqrt[5]{3.127} \approx 5,0032$.

Definição 5.11.

Se existe erro na medida de um experimento que descreve uma função $y = f(x)$, define-se:

$$Erro\ relativo\ = \frac{erro\ na\ medida}{valor\ médio} = \frac{dy}{f(a)}$$

O erro percentual é o erro relativo multiplicado por 100; isto é $\dfrac{dy}{f(a)} \cdot 100\%$.

Por exemplo, se a medida de um comprimento acusa $25cm$. Com um possível erro de $0,1cm$, então o erro relativo é $\dfrac{0,1}{25} = 0,004$.

O significado deste número é que o erro, é em média de $0,004cm$ por centímetro.

Exemplo 5.56.

A altura do paralelepípedo de base quadrada é $15cm$. Se o lado da base muda de 10 para $10.02cm$, usando diferenciais calcular a mudança aproximada de sue volume.

Solução.

O volume do paralelepípedo é $V = x^2h$, onde a altura $h = 15$ é constante e x lado da base quadrada é variável; então, $V = 15x^2$ e $dV = 30x \cdot dx$.

Para nosso caso $x = 10$ e $dx = \pm 0,02$; logo $dV = \pm 6cm^3$. O volume sofre aproximadamente um aumento de $6cm^3$.

O erro relativo é $\dfrac{dV}{V} = \dfrac{30x \cdot dx}{15x^2} = 0,004$ e o erro percentual é $\dfrac{dV}{V} \cdot 100\% = 0,4\%$.

5.7 Teorema sobre funções deriváveis

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ função real com domínio $D(f)$, e $a \in D(f)$.

Definição 5.12.

Dizemos que f apresenta um máximo absoluto em $x = a$, se $f(x) \leq f(a) \quad \forall\, x \in D(f)$.

O valor $f(a)$ é chamado máximo absoluto de f.

Definição 5.13.

Dizemos que f apresenta um mínimo absoluto em $x = a$, se $f(a) \leq f(x) \quad \forall\, x \in D(f)$.

O valor $f(a)$ é chamado - mínimo absoluto de f.

Definição 5.14.

Dizemos que f apresenta um - máximo relativo - ou - máximo local - em $x = a$, se existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(a) \quad \forall\, x \in B(a,\ \delta) = (a - \delta,\ a + \delta) \subseteq D(f)$.

O número $f(a)$ é chamado - máximo relativo - ou - máximo local de f (Figura (5.7)).

Definição 5.15.

Dizemos que f apresenta um mínimo relativo ou mínimo local em $x = a$, se existe $\delta > 0$ tal que $f(a) \leq f(x) \quad \forall\, x \in B(a,\ \delta) = (a - \delta,\ a + \delta) \subseteq D(f)$.

O número $f(a)$ é chamado mínimo relativo ou mínimo local de f. (Figura (5.8))

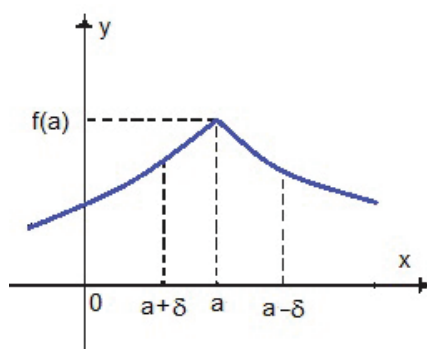



Figura 5.7:

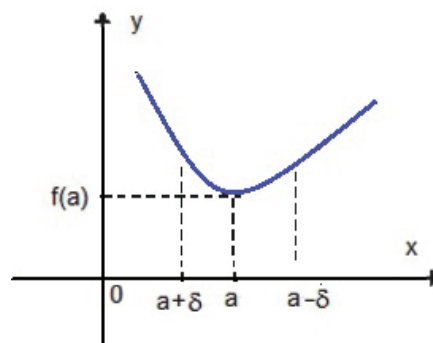



Figura 5.8:

Exemplo 5.57.

Seja $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$, determine seus valores de máximo e mínimo absolutos.

Solução.

O Domínio de $f(x)$ é $D(f) = [-4,\ 4]$ e seu gráfico é uma semicircunferência de raio 4.

Existe máximo absoluto em $x = 0$; $f(0) = 4$ é o máximo absoluto, e o mínimo absoluto em $x = -4$ ou $x = 4$; $f(4) = 0$ é o mínimo absoluto.

Observação 5.8.

- Se $f(c)$ é o valor de mínimo ou máximo, recebe o nome de extremo de f ou valor extremo de f, assim poderemos falar de extremos absolutos ou extremos relativos. O ponto $x = c$ é chamado de ponto de extremo.

- Se $f(c)$ é um extremo relativo, então $x = c$ é um ponto do interior do $D(f)$ isto é existe $\delta > 0$ tal que $B(c,\ \delta) \subseteq D(f)$. Esta condição verifica-se necessariamente se

$f(c)$ é um extremo absoluto, já que o extremo absoluto pode ocorrer num ponto que não é ponto interior do domínio.

Exemplo 5.58.

Seja a função $f(x) = \dfrac{|\ 3x\ |}{2+x^2}$ *seu gráfico mostra-se na Figura* (5.9).

Observe que $f(-1) = f(1) = 1$ é máximo local e absoluto, $f(0) = 0$ é o mínimo local e absoluto.

Considerando a definição de extremo, se temos a função constante $f(x) = k$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então x é um ponto de extremo absoluto e relativo, k é seu máximo absoluto, máximo relativo, mínimo absoluto e mínimo relativo.

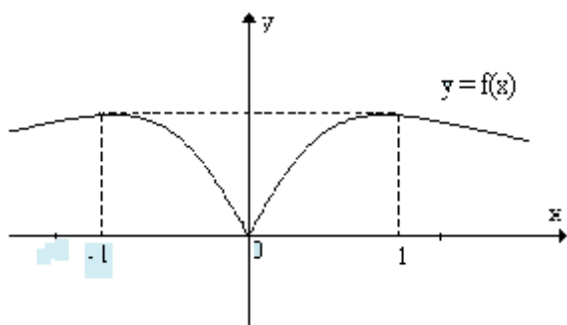
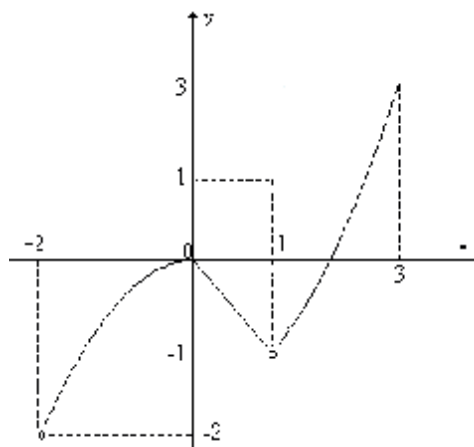



Figura 5.9: Figura 5.10:

Exemplo 5.59.

Seja $\quad f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}, & se, \quad -2 \leq x < 0 \\ -x, & se, \quad 0 \leq x < 1 \\ 1, & se, \quad x = 1 \\ \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2}, & se, \quad 1 < x < 3 \end{cases}$

Observando o gráfico desta função (*Figura* (5.10)), temos:

- $f(-2) = -2$ é o mínimo absoluto; não tem máximo absoluto.

- $f(0) = 0$ e $f(1) = 2$ são máximos relativos.

Propriedade 5.19.

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *função real tal que:*

a) $\quad f(c)$ *é um extremo relativo de* f.

b) *f tem derivada em $x = c$.*

Então $f'(c) = 0$.

Demonstração.

Podemos supor $f(c)$ seja máximo local. Neste caso existe uma vizinhança $B(c,\ \delta) \subseteq$ D(f), tal que $f(x) \leq f(c), \quad \forall\, x \in B(c,\ \delta)$. Então:

$$\text{Se} \quad x < c \quad \text{e} \quad x \in B(c,\ \delta) \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(c) \quad \text{e} \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \tag{5.8}$$

$$\text{Se} \quad x < c \quad \text{e} \quad x \in B(c,\ \delta) \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(c) \quad \text{e} \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \tag{5.9}$$

De (5.8) temos $\quad f'(c^-) = \lim\limits_{x \to c^-} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$

De (5.9) temos $\quad f'(c^+) = \lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$

Do fato $f(x)$ ter derivada em $x = c$, estes limites são iguais, então $f'(c^-) = 0 = f'(c^+)$; isto é $f'(c) = 0$.

De modo análogo mostra-se quando $f(c)$ seja mínimo local.

Observação 5.9.

a) A *Propriedade* (5.19) afirma que, se $f(c)$ é um extremo relativo de f, e se f tem derivada em $x = c$, necessariamente $f'(c) = 0$; isto significa que a reta tangente à curva $y = f(x)$ é horizontal no ponto $P(c,\ f(c))$.

b) O fato $f'(c) = 0$ não implica que $x = c$ seja necessariamente um ponto de extremo.

Exemplo 5.60.

Seja $f(x) = (x - 2)^3 \quad \forall \in \mathbb{R}$; então $f'(x) = 3(x - 2)^2$ e $f'(2) = 0$.

Não obstante, $x = 2$ não é ponto de extremo relativo como mostra a Figura (5.11).

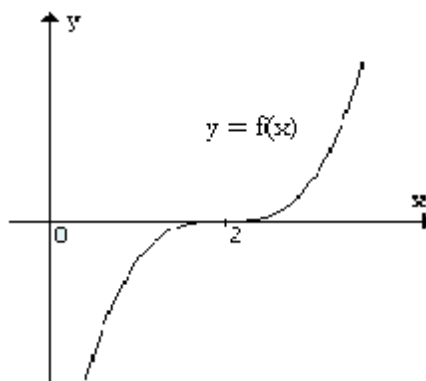



Figura 5.11:

Definição 5.16. *Ponto crítico.*
Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *função real de domínio* $\text{D}(f)$ *e* $a \in \text{D}(f)$*; o ponto* $x = a$ *é chamado ponto crítico ou ponto singular de* f *se;* $f'(a) = 0$ *ou, se não existe* $f'(a)$.

Observação 5.10.

Da Observação (5.9), uma função f *pode ter extremos relativos nos pontos críticos; e, para calcular estes pontos é suficiente resolver a equação* $f'(x) = 0$*, ou a que resulta de considerar que* $f'(x)$ *não exista.*

Exemplo 5.61.

Determine os pontos críticos para cada uma as seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{x}{5} + \dfrac{5}{x}$ **b)** $g(x) = \dfrac{3 \mid x \mid}{1 + x^2}$

c) $h(x) = 9\sqrt[3]{x^5} + 12\sqrt[3]{x}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{12}(2x^3 + 3x^2 - 36x + 6)$

e) $g(x) = \text{sen} x$

Solução. **a)**

Temos $f(x) = \dfrac{x}{5} + \dfrac{5}{x}$, então $f'(x) = \dfrac{1}{5} - \dfrac{5}{x^2}$, quando $f'(x) = 0$ temos $\dfrac{x^2 - 25}{5x^2} = 0$, logo são pontos críticos: $x = 5$ e $x = -5$.

Quando $x = 0$ o número $f'(0)$ não existe, porém $x = 0$ não é ponto crítico por não pertencer ao domínio de f.

Solução. **b)**

$g(x) = \dfrac{3 \mid x \mid}{1 + x^2}$ então $g'(x) = \dfrac{3x}{\mid x \mid}\left[\dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}\right]$ quando $g'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$ e, quando não exista $g'(x)$ temos $x = 0$.

São pontos críticos para a função $g(x)$, os números $x = 1$, $x = -1$ e $x = 0$.

Solução. **c)**

Para a função $h(x) = 9\sqrt[3]{x^5} + 12\sqrt[3]{x}$ temos

$$h'(x) = 15\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[3]{x^{-2}}$$

isto é $h'(x) = \dfrac{15\sqrt[3]{x^4} + 4}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Observe que $h'(0)$ não existe, e não existe número real tal que $h'(x) = 0$, logo o único ponto crítico é $x = 0$.

Solução. **d)**

$f(x) = \dfrac{1}{12}(2x^3 + 3x^2 - 36x + 6)$ então

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x - 6) = \frac{1}{2}(x-2)(x+3) = 0$$

implica que os únicos pontos críticos são $x = -3$ e $x = 2$.

Solução. **e)**

$g(x) = \text{sen}x$ temos $g'(x) = \cos x$; quando $g'(x) = 0$ temos $x = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

São pontos críticos de $g(x)$ os números $x = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Teorema 5.1. *de Rolle. (*$1652 - 1719$*).*

Seja $f : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função que cumpre:*

a) f *contínua em* $[a,\ b]$.

b) f *tem derivada em* $(a,\ b)$.

c) $f(a) = f(b) = 0$.

Então existe $c \in (a,\ b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Demonstração.

Da continuidade da função em $[a,\ b]$, segue que a função tem pelo menos um mínimo e um máximo absoluto em $[a,\ b]$; isto é existem c_1 e c_2 em $[a,\ b]$ tais que

$$f(c_1) = m = \min_{x \in [a,\ b]} .f(x) \qquad \text{e} \qquad f(c_2) = M = \max_{x \in [a,\ b]} .f(x)$$

Se $c_1 \in (a, b)$, pela hipótese **b)** e da *Teorema* (5.1) temos $f'(c_1) = 0$ e esta propriedade estaria mostrada sendo $c = c_1$; de modo análogo se $c_2 \in (a,\ b)$.

Resta mostrar o caso que c_1 e c_2 sejam os extremos do intervalo $[a,\ b]$.

Suponhamos que $c_1 = a$ e $c_2 = b$ (ou $c_1 = b$ e $c_2 = a$), a hipótese **c)** indica que $f(a) = f(b) = 0$, isto significa que $m = M = 0$ e $f(x) = 0 \quad \forall\, x \in [a,\ b]$; logo $f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in [a,\ b]$ e, esta propriedade é verdadeira. □

Observação 5.11.

A Teorema (5.1) *segue sendo válida se a hipótese* **c)** *é substituída por* $f(a) = f(b)$.

5.7.1 Interpretação geométrica do teorema de Rolle

O teorema de Rolle tem significado geométrico imediato.

As hipóteses dizem que o gráfico de f é continuo no intervalo $[a, b]$ e tem retas tangente em todo os pontos com abscissas em $(a,\ b)$ e, se $A(a,\ f(a))$ e $B(b,\ f(b))$ são os pontos

com, $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um ponto $P(c,\ f(c))$ com P diferente de A e B no qual a reta tangente é paralela ao eixo-x como mostra a *Figura* (5.12).

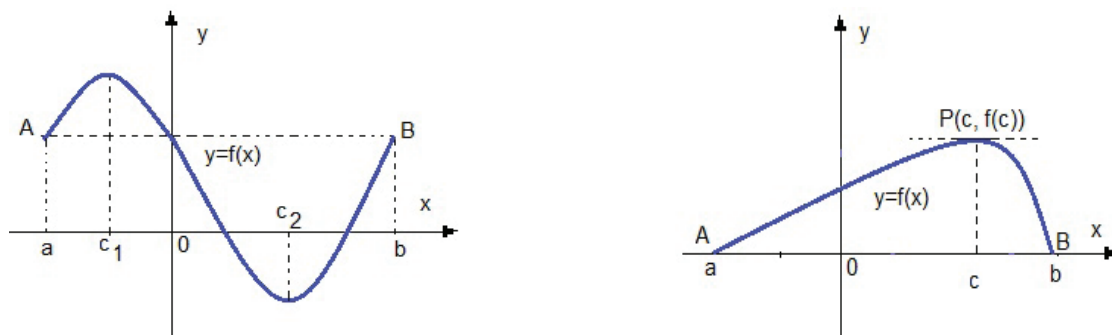



Figura 5.12:

Exemplo 5.62.

Dada a função $f(x) = \dfrac{x^2 - 9x}{x - 3}$ *verificar se cumpre o teorema de Rolle.*

Solução.

Observe que $f(0) = f(9) = 0$, porém a função f não é contínua em $x = 3$.

Logo, não podemos aplicar o teorema de Rolle, isto não significa que não exista um valor dentro do intervalo para o qual sua derivada seja igual a zero.

Exemplo 5.63.

Dada a função $f(x) = \sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x}$, *verificar se cumpre o teorema de Rolle no intervalo* $[0,\ 3]$.

Solução.

i) f é contínua no intervalo $[0,\ 3]$.

ii) $f'(x) = \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$; isto é, f tem derivada no intervalo $(0,\ 3)$.

iii) $f(0) = f(3) = 0$.

Então, pelo teorema de Rolle, existe $c \in (0,\ 3)$ tal que $f'(c) = 0$, isto é $f'(c) = \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{c} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{c^2}} = 0$ onde $c = \dfrac{3}{4}$.

Exemplo 5.64.

O custo $C(x)$ *de pedido de uma mercadoria é dada pela função:*

$$C(x) = \frac{10(x^2 + x + 3)}{x(x + 3)}$$

onde $C(x)$ *é medido em milhares de reais e* x *é o tamanho do pedido medido em centenas.*

(a) *Verifique que* $C(3) = C(6)$.

(b) *Segundo o teorema de Rolle, a taxa variação de custo deve ser zero para algum pedido no intervalo* $[3,\ 6]$. *Determine o tamanho desse pedido.*

Solução.

a) Observe que $C(3) = \dfrac{10(3^2+3+3)}{3(3+3)} = \dfrac{150}{18} = \dfrac{25}{3}$ e $C(6) = \dfrac{10(6^2+6+3)}{6(6+3)} = \dfrac{450}{54} = \dfrac{25}{3}$, logo $C(3) = C(6)$.

b) A função custo $C(x)$ é contínua em todo seu domínio ($x > 0$), em particular no intervalo $[3,\ 6]$, sua derivada é

$$C'(x) = 10\left[\frac{2x^2-6x-9}{x^2(x+3)^2}\right]$$

existe no intervalo $(3,\ 6)$; logo existe $c \in (3,\ 6)$ tal que $C'(c) = 0$.

Isto é $10\left[\dfrac{2c^2-6c-9}{c^2(c+3)^2}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad 2c^2-6c-9 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \dfrac{6 \pm \sqrt{108}}{4}$.

Como $c \in (3,\ 6) \quad \Rightarrow \quad c = \dfrac{6+\sqrt{108}}{4} = \dfrac{6+10,4}{4} = 4,1$ aproximadamente.

Quando o pedido for aproximadamente maior que $4,1$ centenas (410 unidades), a taxa de variação de custo deve ser zero.

Teorema 5.2. *Do Valor Médio* - **T.V.M.**

Seja $f : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função que cumpre:*

a) f *contínua em* $[a,\ b]$.

b) f *tem derivada em* $(a,\ b)$.

Então existe $c \in (a,\ b)$ *tal que* $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demonstração.

Seja m o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $A(a,\ f(a))$ e $B(b,\ f(b))$ e $g(x)$ a reta que passa pelos pontos A e B, então $m = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, e $g(x) = f(a)+m\cdot(x-a)$.

Considere a função auxiliar $F(x) = f(x) - g(x)$, isto é $F(x) = f(x) - f(a) - m(x-a) \quad \forall\, x \in [a,\ b]$.

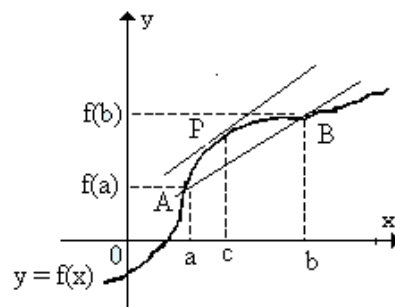
Observe que $F(x)$ cumpre as condições do Teorema de Rolle no intervalo $[a,\ b]$, pois F é contínua em $[a,\ b]$, é derivável em $(a,\ b)$ e $F(a) = F(b) = 0$.

Então existe $c \in (a,\ b)$ tal que $F'(c) = 0$, isto é $F'(c) = f'(c) = m = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Este Teorema do Valor Médio também é conhecido como Teorema de ou de Lagrange.

5.7.2 Interpretação geométrica do Teorema do Valor Médio.

O gráfico de $f(x)$ no intervalo $[a,\ b]$ tem a propriedade de ser contínuo em $[a, b]$ e possui retas tangentes em todos seus pontos de abscissas em $(a,\ b)$ então o **T.V.M.** afirma que existe pelo menos um ponto $P(c,\ f(c))$ com P diferente de $A(a,\ f(a))$ e $B(b,\ f(b))$ na qual a reta tangente é paralela à corda (*Figura* (5.13)).

Figura 5.13:

Propriedade 5.20.

Seja $f : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que cumpre:

a) *f contínua em $[a,\ b]$.*

b) *f tem derivada em $(a,\ b)$ e $f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in (a,\ b)$.*

Então f é constante em $[a,\ b]$, isto é $f(x) = k \quad \forall\, x \in [a,\ b]$.

Demonstração.

Seja $x \in (a,\ b)$ um elemento arbitrário e $k \in \mathbb{R}$ uma constante.

As condições do **T.V.M.** são verificadas no intervalo $[a,\ x] \subseteq [a, b]$, logo existe $c \in (a,\ x)$ tal que $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$.

Da hipótese **b)** segue $f'(c) = 0$, logo $f(x) - f(a) = 0$ isto é $f(x) = f(a) = k$, pois x é arbitrário em $(a,\ b)$ assim $f(x) = k \quad \forall\, x \in [a,\ b)$. Da continuidade de f em, $[a,\ b]$ segue que $f(x) = k \quad \forall\, x \in [a, b]$.

Propriedade 5.21.

Se uma função f tem derivada em $(a,\ b)$ e $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,\ b)$, então $f(x) = k$ para todo $x \in (a,\ b)$ onde k é constante.

A demonstração desta propriedade é exercício para o leitor.

Observação 5.12.

Se o intervalo não é aberto, a Propriedade (5.21) *nem sempre é verdadeira. Por exemplo, para a função $f(x) = [|x|] = n, \quad \forall\, x \in [n,\ n+1), \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$, sua derivada $f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Z})$.*

Este exemplo mostra que, se a derivada é zero num determinado conjunto, então a função não necessariamente é constante em tal conjunto.

Propriedade 5.22.

Sejam f e $g : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções que satisfazem:

a) *f e g contínuas em $[a,\ b]$.*

b) f *e* g *deriváveis em* $(a,\ b)$ *e* $f'(x) = g'(x) \quad \forall\, x \in (a,\ b)$.

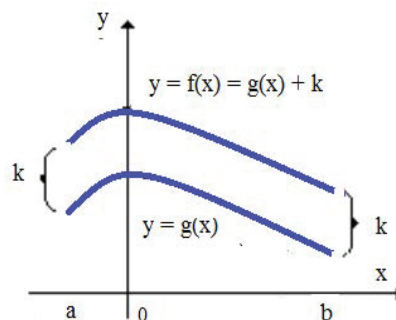
Então $f(x) = g(x) + k \quad \forall\, x \in [a,\ b]$ *onde* k *é uma constante.*
Demonstração.

Considere a função $h(x) = f(x) - g(x), \quad \forall\, x \in [a,\ b]$ então h é contínua em $[a,\ b]$ e tem derivada em $(a,\ b)$ e $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \quad \forall\, x \in (a,\ b)$ e pela *Propriedade* (5.21) $h(x) = k \quad \forall\, x \in [a,\ b]$ onde k é constante.

Portanto $f(x) = g(x) + k \quad \forall\, x \in [a,\ b]$.

Figura 5.14:

Observação 5.13.

A Propriedade (5.22) *indica que se* f *e* g *são funções deriváveis no intervalo aberto* $I \subseteq \mathbb{R}$ *e* $f'(x) = g'(x)$ *em* I*, então seus gráficos são curvas paralelas como mostra a Figura* (5.14).

Exemplo 5.65.

Seja $f(x) = x^3 - x^2, \quad x \in [-1,\ 3]$*, determinar o valor que cumpre o* **T.V.M.**
Solução.

A função $f(x)$ é um polinômio, logo ela é contínua em $[-1,\ 3]$ e com derivada em $(-1,\ 3)$ e $f'(x) = 3x^2 - 2x$.

Em virtude do **T.V.M.** existe $c \in (-1,\ 3)$ tal que $f'(c) = 3c^2 - 2c$ onde $3c^2 - 2c = 5 \quad \Rightarrow \quad c = -1$ e $c = \dfrac{5}{3}$.

Portanto, o valor que cumpre o **T.V.M.** é $c = \dfrac{5}{3}$.

Exemplo 5.66.

Verificar se o **T.V.M.** *podemos aplicar à função* $f(x)$ *no intervalo* $[0,\ 2]$ *onde:*

$$f(x) = \begin{cases} 6 - 3x^2 & se, \quad x \leq 1 \\ 3x^{-2} & se, \quad x > 1 \end{cases}$$

Solução.

No intervalo $[0,\ 1]$ a função é polinômica, e no intervalo $(1,\ 2]$ a função está bem definida assim, para determinar a continuidade de $f(x)$ no intervalo $[0,\ 2]$ é importante determinar a continuidade em $x = 1$. Observe que $f(1^+) = f(1^-) = 3$ e $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$, logo f é contínua em $x = 1$, consequentemente em $[0,\ 2]$.

Por outro lado,

$$f'(x) = \begin{cases} -6x & \text{se}, \quad x \leq 1 \\ -6x^{-3} & \text{se}, \quad x > 1 \end{cases}$$

e $f'(1^+) = f'(1^-) = -6$, então f é derivável em $(0,\ 2)$.

Como f cumpre as condições do **T.V.M.** , existe $c \in [0, 2]$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = -\dfrac{21}{8}$. Observe que $f'(1^+) = f'(1^-) = f'(1) = -6$ então $c < 1$ ou $c > 1$, mais; se $f'(x) = -6x$ para $x < 1$ então $f'(c) = -6c = -\dfrac{21}{8} \quad \Rightarrow \quad c = \dfrac{7}{16} \in (0,\ 2)$.

Por outro lado, se $f'(x) = -6x^{-3}$ para $x > 1$, então $f'(c) = -6c^{-3} = -\dfrac{21}{8} \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt[3]{\dfrac{16}{7}} \in (0,\ 2)$.

Portanto, os valores que verificam o **T.V.M.** são $\dfrac{7}{16}$ e $\sqrt[3]{\dfrac{16}{7}}$.

Exemplo 5.67.

Dada a função $g(x) = \dfrac{1}{x - 4}$ *mostre que não existe nenhum número real c no intervalo* $(2,\ 6)$ *tal que* $g'(c) = \dfrac{g(6) - g(2)}{4}$. *Determine se isso contradiz o* **T.V.M.** *justifique sua resposta.*

Solução.

O **T.V.M.** diz que, se g é contínua em $[2, 6]$ e diferenciável em $(2, 6)$ então existe $c \in (2, 6)$ tal que $g'(c) = \dfrac{g(6) - g(2)}{4}$.

Observe que $g(x)$ não é derivável em $(2, 6)$ em particular em $x = 4$ temos $g'(x) = -\dfrac{1}{(x - 4)^2}$ não existe.

Por outro lado, g não é contínua em $[2, 6]$, em particular em $x = 4$.

Portanto não se contradiz o **T.V.M.**

Supondo que exista $c \in (2, 6)$ tal que

$$g'(c) = -\frac{1}{(c - 4)^2} = \frac{g(6) - g(2)}{4} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{(c - 4)^2} = \frac{1}{4}$$

Isto último é um absurdo.

Exercícios 5-3

1. Para os seguintes exercícios, determine se cumpre o teorema de Rolle para as funções dadas no intervalo indicado, se for assim, determine os valores que o cumprem.

1. $f(x) = x^2 - 4x$ em $[0,\ 4]$ **2**. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ em $[1,\ 3]$
3. $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ em $[-1,\ 1]$ **4**. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ em $[-2,\ 2]$
5. $f(x) = x^2 + 4x$ em $[-4,\ 0]$ **6**. $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$ em $[-\frac{1}{4},\ 1]$

2. Pode-se aplicar o teorema de Rolle para as seguintes funções ?

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x - 2}$ **2**. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x + 2}$
3. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ em $[2,\ 4]$ **4**. $f(x) = x^2 + 2x - 5$
5. $f(x) = \text{Ln}(\text{sen}x)$ em $[\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}]$ **6**. $f(x) = x^2 - 3x$
7. $g(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 11$ em $[-1,\ 2]$ **8**. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 4}{x - 2}$
9. $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$ em $[1,\ 2]$ **10**. $g(x) = 4^{\text{sen}x}$ em $[0,\ \pi]$

11. $f(x) = \begin{cases} x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6x + \frac{1}{2}, & \text{se, } x \leq -1 \\ \mid x^2 - 4 \mid, & \text{se, } \mid x \mid < 1 \\ x^4 - x^3 - 3x + 6, & \text{se, } x \geq 1 \end{cases}$ em $[-2,\ 2]$.

3. Mostre a seguinte propriedade: *Se a equação* $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x = 0$ *tem uma raiz positiva* $x = x_0$, *então a equação* $na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \cdots + a_{n-1} = 0$ *também tem uma raiz positiva, sendo esta menor que* x_0.

4. A função $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{x^4}$ tem valores iguais nos extremos do intervalo $[-1, 1]$. Mostre que a derivada $f'(x)$ não se reduz a zero em $[-1,\ 1]$ e explicar por que não cumpre o teorema de Rolle.

5. A função $g(x) = \mid x - 2 \mid$ tem valores iguais nos extremos do intervalo $[2 - a,\ 2 + a]$ para $a > 0$. Mostre que a $g'(x)$ não se reduz a zero em $[2 - a,\ 2 + a]$ e explicar por que não cumpre o teorema de Rolle.

6. Seja a função $f(x) = 1 + x^m(x - 1)^n$ onde m e n são inteiros positivos. Sem calcular a derivada, mostre que a equação $f'(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $(0,\ 1)$.

7. Mostre que a equação $x^3 - 3x + c = 0$ não pode ter raízes diferentes no intervalo $(0,\ 1)$.

8. Para o seguintes exercícios determinar se o **T.V.M.** é aplicável no intervalo dado; caso afirmativo verificar.

1. $f(x) = x^2 + 2x$ em $[-2,\ 0]$ **2**. $f(x) = \sqrt{x^2+9}$ em $[0, 4]$

3. $f(x) = 2x^3 - x^2$ em $[-2,\ 2]$ **4**. $f(x) = \mid 4 - x^2 \mid$ em $[-2,\ 2]$

5. $f(x) = \mid 9 - 4x^2 \mid$ em $[-\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}]$ **6**. $f(x) = \text{Ln}x$ em $[1,\ e]$

7. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^4-4}$ em $[-9,\ -4]$ **8**. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ em $[2,\ 4]$

9. $f(x) = \dfrac{x^2}{4+\mid x \mid}$ em $[-1,\ 2]$ **10**. $f(x) = \dfrac{\mid x \mid^3}{1+x^6}$ em $[-2,\ 2]$

11. $f(x) = x^n$ em $[0,\ a]$ $n > 0$ $a > 0$

12. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x^2}, & \text{se, } x \leq -1 \\ 8 - 4x^2, & \text{se, } x > -1 \end{cases}$ em $[-2,\ 0]$

13. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2}, & \text{se, } x < 1 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{se, } x \geq 1 \end{cases}$ em $[0,\ 2]$

14. $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{se, } x < 3 \\ 15 - 2x & \text{se, } x \geq 3 \end{cases}$ em $[-1,\ 5]$

15. $f(x) = \begin{cases} \mid x^2 - 9 \mid & \text{se, } x < 2 \\ 5 + 2\sqrt{x-2} & \text{se, } 2 \leq x < 11 \\ 11 + (11)^2, & \text{se, } x > 11 \end{cases}$ em $[-4,\ 12]$

16. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{se, } -2 \leq x < 0 \\ 4 - x^3 & \text{se, } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{6}{x^2+1}, & \text{se, } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ em $[-2,\ 2]$

9. Determine os pontos críticos das funções do exercício anterior.

10. Sem calcular a derivada da função $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, estabelecer quantas raízes tem a equação $f'(x) = 0$ e indicar em que intervalos se encontram.

11. Mostre que a que a equação $f(x) = x^n + px + q$ não pode ter mais de dois raízes reais quando n é par; e mais de três raízes quando n é ímpar.

12. Para as seguintes funções, determine o polinômio $T(x)$ de grau *um* que aproxime localmente a $f(x)$ no ponto indicado e obter valores que se indicam:

1. $f(x)=\sqrt{15+x^2}+\sqrt[3]{x}$ em $x=64$, $f(67)$, $T(67)$.

2. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ em $x=2$, $f(1.68)$, $T(1.68)$.

3. $f(x)=x^2+4x+5$ em $x=5$, $f(5.8)$, $T(5.8)$.

13. Para as funções seguintes. Achar Δf, df, e $E(x)=\Delta f-df$ para os valores indicados:

1. $f(x)=x^2+5x$, $x=-1$, $\Delta x=0.02$.

2. $f(x)=x^3+5x^2-3x+2$, $x=2$, $\Delta x=0.01$.

3. $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ $x=0$, $\Delta x=0.1$.

4. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ $x=5$, $\Delta x=0.01$.

5. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^3+1}$ $x=1$, $\Delta x=0.3$.

14. Para os seguintes exercícios achar o diferencial da função:

1. $f(x)=3x^3+5x^2+2$ **2.** $f(x)=x^2+2\sqrt{x-1}$

3. $f(x)=\dfrac{2ax}{(x+1)^3}$ **4.** $f(t)=\sqrt{\dfrac{t+1}{t-1}}$

5. $f(x)=\dfrac{3kx}{\sqrt{x+1}}$ **6.** $f(x)=\dfrac{4\cdot sgn(x-1)}{\sqrt{x^2-1}}$

15. Usando diferenciais determine o valor indicado.

1. $f(x)=x^4+2x^2-3$, $f(-2.97)$. **2.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{5+3x}}{x+1}$ $f(2.024)$.

3. $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$ $f(0.1)$. **4.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x+1}}{x^2+1}$ $f(1.91)$.

5. $f(x)=x^3+5x^2-x+1$, $f(0.003)$.

16. O diâmetro de uma esfera é $9cm$ ao médio introduz-se um possível erro de $\pm 0.05cm$. Qual é o erro percentual possível no cálculo do volume?

17. Calcular o valor aproximado para as seguintes expressões:

1. $\sqrt{37,5}$ **2.** $\sqrt[3]{9,12}$ **3.** $\sqrt[3]{(8,01)^4}+(8,01)^2-\dfrac{1}{\sqrt[3]{8,01}}$

4. $\sqrt{82}+\sqrt[4]{82}$ **5.** $3\sqrt{63}+\dfrac{1}{2\sqrt[3]{63}}$ **6.** $\sqrt[5]{1020}$

18. Para $a>b$ mediante o Teorema do Valor Médio, mostre validade das desigualdade: $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$ se $n>1$; e as desigualdades opostas se $n<1$.

19. Usando diferenciais determine o valor de x para os quais:

    1. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < 0,01.$ **2.** $\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x} < 0,002.$

20. Um ponto movimenta-se na metade superior da curva $y^2 = x + 1$, de modo que $\dfrac{dx}{dt} = \sqrt{2x+1}$. Determine $\dfrac{dy}{dt}$ quando $x = 4$.

21. Mediante o Teorema do Valor Médio, mostre as desigualdades:

    1. $\dfrac{a-b}{a} \leq \text{Ln}\left[\dfrac{a}{b}\right] \leq \dfrac{a-b}{b}$ sendo $0 < b \leq a$.

    2. $\dfrac{a-b}{\cos^2 b} \leq \tan a - \tan b \leq \dfrac{a-b}{\cos^2 a}$ sendo $0 < b \leq a < \dfrac{\pi}{2}$.

22. Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3+x^2}{4} & \text{se} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$

    1. Desenhar o gráfico de $y = f(x)$ para $x \in [0, 2]$.

    2. Verificar se satisfaz as condições do Teorema do Valor Médio. Se satisfaz as condições do TVM, determinar esses valores.

23. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se diz que $x = c$ é um ponto fixo de f, se $f(c) = c$.

    1. Determine os pontos fixos de $f(x) = x^3 - 8x$.

    2. Verificar se $f(x) = x^2 + x + 1$ tem pontos fixos.

    3. Suponha $y = f(x)$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$ tenha derivada $f'(x) \neq 1$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
    Mostre que f admite no máximo um ponto fixo.

24. Mostre que se uma função é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) < 1$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$, então f tem no máximo um ponto fixo.

25. As variáveis x, y, z são todas funções de t e cumpre a relação: $x^3 - 2xy + y^2 + 2xz + 2xz^2 + 3 = 0$.
    Achar $\dfrac{dz}{dt}$ quando $x = 1$, $y = 2$ se $\dfrac{dx}{dt} = 3$ e $\dfrac{dy}{dt} = 4$ para todo t.

26. Estima-se em um metro o lado de um quadrado, com um erro máximo de $0,005cm$. Usando diferenciais estime o erro máximo no cálculo da área. Quais são o erro relativo e percentual aproximado?

27. A área lateral de um cone reto circular e altura h e raio da base r é dada por $A_L = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$. Para determinado cone, $r = 6cm$ e a medida da altura h acusa $8cm$ com um erro máximo de $0,01cm$; determine o erro máximo na medida da área lateral. Qual o erro percentual aproximado?

Miscelânea 5-1

1. A função definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + (a-3)x - 3a}{x-3}, & \text{se} \quad x \neq 3 \\ 1 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$ é derivável em toda a reta real.

   1. Qual o valor de a? **2.** Qual o valor de $f'(3)$?

2. Suponha que f é uma função para o qual $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 0$. Quais das seguintes proposições são verdadeiras, quais podem ser verdadeiras e quais necessariamente são falsas?

   1. $f'(2) = 2$ **2.** $f(2) = 0$ **3.** $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

   4. f es contínua en $x = 0$ **5.** f es contínua em $x = 2$.

3. Suponha que f e g sejam funções diferenciáveis para as quais verificam-se as seguintes condições: **a)** $f(0) = 0$ e $g(0) = 1$ **b)** $f'(x) = g(x)$ e $g'(x) = -f(x)$.

   1. Seja $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$. Calcular $h'(x)$ e utilizar este resultado para mostrar que $f^2(x) + g^2(x) = 1$ para todo x.

   2. Suponha que F e G são outro par de funções que cumprem as condições **a)** e **b)** e seja $k(x) = [F(x) - f(x)]^2 + [G(x) - g(x)]^2$. Calcular $k'(x)$ e utilizar este resultado para deduzir qual é a relação entre $f(x)$ e $F(x)$ e entre $g(x)$ e $G(x)$:

   3. Mostre um par de funções que cumprem as condições a) e b). Podem existir outras. Justificar sua resposta.

4. Determine todas as funções f da forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ com $a \neq 0$ que verificam $f'(-1) = f'(1) = 0$. Alguma das funções determinadas anteriormente verifica $f(0) = f(1)$? Justificar sua resposta.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função derivável; e sejam a e b duas raízes da derivada $f'(x)$ de modo que entre elas não exista outra raiz de $f'(x)$. Determine se pode ocorrer alguma das seguintes possibilidades:

   1. Entre a e b não existe nenhuma raiz de $f(x)$.

   2. Entre a e b existe só uma raiz de $f(x)$.

   3. Entre a e b existem dois ou mais raízes de $f(x)$.

6. Mostre que a equação $x + x\text{sen}x - x^2 = 0$ tem exatamente duas raízes reais.

7. Usar que $y = e^t \cos t$, $\quad \dfrac{dy}{dt} = e^t \cos t - e^t \text{sen}t$, $\quad \dfrac{d^2y}{dt^2} = -2e^t \text{sen}t$ para substituir em: $E = \dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} + 2t$.

8. Determine:

   1. $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ sendo $y = \text{sen}(3x)$ **2.** $f'''(0)$ sendo $f(x) = \text{sen}x \cos x$

   3. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ sendo $y = \text{Ln}(x^2 - 3x)$ **4.** $f''(x)$ sendo $f(x) = e^{x+x^2}$

   5. Todas as derivadas da função f definida por $f(x) = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$

   6. $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ sendo $y = 2\text{sen}x + 3\cos x - x^3$

9. Supondo que as funções abaixo definem implicitamente y como uma função de x, determine a primeira derivada y'

   1. $x^4 + 2y^3 - 4xy = 0$ **2.** $(x + y)^2 - (x - y)^2 = x^3 - y^3$

   3. $x^2y^2 + 8x = y - 1$ **4.** $x^2y + \text{sen}2y = \pi$

   5. $y^2 + \cos(2xy) = y$ **6.** $y^2 + x^2 = xy$

10. Uma frente fria aproxima-se da UFT. A temperatura é z graus t horas a meia noite e $z = 0,1(400 - 40t + t^2) \quad 0 \leq t \leq 12$. **(a)** Ache a taxa de variação média de z em relação a t entre 5 e 6 horas da manhã; **(b)** Ache a taxa de variação de z em relação a t às 5 horas da manha.

11. Se $A\,cm^2$ é a área de um quadrado e $s\,cm$ é o comprimento de seu lado, ache a taxa de variação média de A em relação a s quando s muda de: **(a)** $4,00$ a $4,60$; **(b)** $4,00$ a $4,30$; **(c)** $4,00$ a $4,10$; **(d)** Qual a taxa de variação instantânea de A em relação a s quando $s = 4,00$?

12. Um tanque de água tem a forma de um cone circular reto invertido, de altura 12 *pés* e raio da base 6 *pés*. Bombeia-se água a razão de $10gal$ por minuto. Determinar aproximadamente a razão com a qual o nível de água sobe ao tanque quando a profundidade é 3 *pés* $(1\ gal \approx 0.1337pés^3)$

13. Uma empresa introduz um novo produto no mercado cujas vendas são dadas por: $S(t) = \dfrac{200(2t+1)}{t+2}$ onde $S(t)$ é a quantidade vendida durante os t primeiros meses. **(a)** Encontre a taxa de variação média de $S(t)$ ao longo do primeiro ano. **(b)** Em que mês $S'(t)$ é igual à taxa de variação média durante o primeiro ano?

14. Ao esquentar um disco de metal, seu diâmetro varia a razão de $0.01cm/min$. Quando o diâmetro esta com 5 metros, com que razão esta variando a área de uma de suas faces?

Capítulo 6

APLICAÇÕES DAS DERIVADAS

G. Leibnitz

Gottfried Wilhelm Leibnitz *nasceu no* 1 *de julho de* 1646*, em Leipzig (Alemanha), e faleceu em* 14 *de novembro de* 1716*.*
Em 1661*, quando tinha* 15 *anos, ingressou na Universidade de Leipzig e, aos dezessete, em* 1663*, já havia adquirido o seu diploma de bacharel. Estudou Teologia, Direito, Filosofia e Matemática, na Universidade.*

Para muitos historiadores, Leibnitz é tido como o último erudito que possuía conhecimento universal. Foi um dos primeiros, depois de Pascal, a inventar uma máquina de calcular. Imaginou máquinas de vapor, estudou filosofia chinesa e tentou promover a unidade da Alemanha.

Aos 20 *anos de idade, já estava preparado para receber o título de doutor em direito. Este lhe foi recusado por ser ele muito jovem. Deixou então Leipzig e foi receber o seu título de doutor na Universidade de Altdorf, em Nuremberg.*

A partir daí, Leibnitz entrou para a vida diplomática na corte de Hanôver, ao serviço dos duques, um dos quais se tornou rei de Inglaterra, sob o nome de Jorge I. Como representante governamental influente, ele teve a oportunidade de viajar muito durante toda a sua vida. Em 1672*, foi para Paris onde conheceu Huygens, quem lhe sugeriu a leitura dos tratados de* 1658*, de Blaise Pascal, se quisesse tornar-se um matemático.*

Em 1673*, visitou Londres, onde adquiriu uma cópia do "Lectiones Geometricae", de Isaac Barrow, e tornou-se membro da Royal Society. Foi devido a essa visita a Londres, onde apareceram rumores que Leibnitz talvez tivesse visto o trabalho de Newton, que por sua vez o teria influenciado na descoberta do Cálculo, colocando em dúvida a legitimidade de suas descobertas relacionadas ao assunto.*

A procura de um método universal, através do qual pudesse obter conhecimentos, fazer invenções e compreender a unidade essencial do universo, foi o principal objetivo da sua vida. A "Scientia Generalis" que queria construir tinha muitos aspectos, e vários deles levaram Leibnitz a descobertas na matemática. A procura de uma "characteristica general" levou-o a permutações, combinações e à lógica simbólica; a procura de uma "língua universalis", na qual todos os erros de raciocínio pudessem aparecer como erros computacionais, o levou não só à lógica simbólica, mas também a muitas inovações na notação matemática. Leibnitz foi um dos maiores inventores de símbolos matemáticos.

6.1 Velocidade instantânea. Aceleração instantânea.

Uma das utilidades da taxa de variação é a descrição de movimento de um objeto ao longo de uma reta; tal movimento é chamado movimento retilíneo. Se utilizamos um sistema de coordenadas cartesianas, convencionalmente se o objeto se movimenta para a direita (ou para cima), sua direção é positiva ao passo que, se o movimento é para a esquerda (ou para baixo), sua direção é negativa.

Quando uma função $S(t)$ dá a posição (relativa à origem) de um objeto como função do tempo, ela é chamada *função posição*. Se, durante um período Δt de tempo, o objeto se desloca: $\Delta S(t) = S(t+\Delta t) - S(t)$ isto é a variação da distância, então a taxa de variação média é: $\dfrac{\Delta S(t)}{\Delta t}$; esta taxa de variação média é chamada de *velocidade média*.

Definição 6.1.
Se $S(t)$ dá a posição no instante t de um objeto se movendo em linha reta, então a velocidade média do objeto no intervalo de tempo $[t,\ t+\Delta t]$ é dado por:

$$\textit{Velocidade média} = \frac{\Delta S(t)}{\Delta t} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

Exemplo 6.1.

Um objeto cai de uma altura de $40m$, sua altura h no instante t é dada é dada pela função $S(t) = -4,9t^2 + 40$, onde $S(t)$ é medido em metros e t em segundos. Determine a taxa de variação média nos intervalos: **a)** $[1,\ 1.1]$; **b)** $[1,\ 1.5]$; **c)** $[1,\ 2]$.

Solução.

Temos a altura $h = S(t)$. Usando a equação $S(t)$ podemos calcular as alturas nos instantes: $t = 1$, $t = 1.4$ e $t = 2$ segundos na tabela:

t	1	1,1	1,5	2
$S(t)$	35,1	34,1	29	20,4

a) Para o intervalo $[1,\ 1.1]$ o objeto cai de uma altura de $35,1m$ para $34,1m$ e a taxa de variação média é:

$$\frac{\Delta S(t)}{\Delta t} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \frac{34,1 - 35,1}{1,1 - 1} = -10\, m/s$$

b) Para o intervalo $[1,\ 1.5]$ o objeto cai de uma altura de $35,1m$ para $29m$ e a taxa de variação média é:

$$\frac{\Delta S(t)}{\Delta t} = \frac{S(t+\delta t) - S(t)}{\Delta t} = \frac{29 - 35,1}{1,5 - 1} = -12,2\, m/s$$

c) Para o intervalo $[1,\ 2]$ o objeto cai de uma altura de $35,1m$ para $20,4m$ e a taxa de variação média é:

$$\frac{\Delta S(t)}{\Delta t} = \frac{S(t+\delta t) - S(t)}{\Delta t} = \frac{20,4 - 35,1}{2-1} = -14,7\,m/s$$

Observe, a velocidade média neste exemplo é negativa, logo o objeto se movimenta para abaixo.

6.1.1 Velocidade instantânea

Definição 6.2. *Velocidade instantânea.*
Se $S(t)$ determina a posição no instante t de um objeto se movendo em linha reta, então a velocidade do objeto no instante t é dada por:

$$V'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} \tag{6.1}$$

Exemplo 6.2.
Determine a velocidade instantânea quando $t = 2$, de um objeto em queda livre cuja função de posição é dada por $S(t) = 200 - 32t^2$ onde t é dado em segundos e $S(t)$ em metros.
Solução.

Pela expressão (6.1) temos $V'(t) = -64t$; logo $V'(2) = -(64)(2) = -128m/s$.

Exemplo 6.3.
Uma partícula se movimenta em linha reta horizontal (positiva para a direita) segundo a relação $s = t^3 - 3t^2 - 9t + 5$. Em que intervalos de tempo a partícula movimenta-se para a direita; e em quais para a esquerda?
Solução.

A partícula movimenta-se para a direita quando a velocidade é positiva; e para a esquerda quando a velocidade é negativa.

A velocidade é dada pela função $s'(t) = v(t) = 3t^2 - 6t - 9$. Construímos a seguinte tabela para a função $v(t)$:

t	-2	-1	1	3	4
$v(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Se $t < -1$, a velocidade é positiva e o movimento é para a direita; se $-1 < t < 3$, a velocidade é negativa e o movimento é para a esquerda; se $t > 3$, a velocidade é positiva e o movimento é para a direita.

O movimento para a direita e o movimento para a esquerda, então separados por instantes de velocidade nula.

Exemplo 6.4.

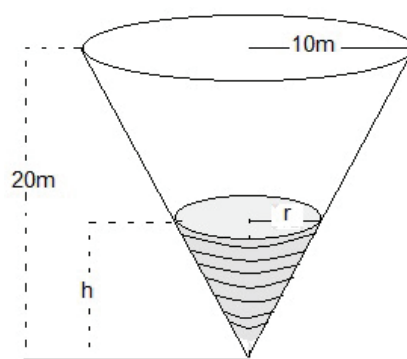
Um tanque tem a forma de um cone invertido (Figura (6.1)) com $20m$ *de altura e uma base com* $10m$ *de raio. A água "flui" no tanque a uma taxa de* $5m^3/s$*. Com que velocidade o nível da água estará se elevando quando sua profundidade for de* $8m$*?.*
Solução.

Sejam h a profundidade, r o raio da base do cone e V o volume da água no instante t; queremos achar $\dfrac{dh}{dt}$ sabendo que $\dfrac{dV}{dt}$ é $5m^3/s$.

O volume da água é dado por $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ onde todas as medidas dependem do tempo t; por semelhança de triângulos $\dfrac{r}{h} = \dfrac{10}{20}$ ou $r = \dfrac{10}{20}h$, logo: $V = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{1}{2}h\right)^2 h = \dfrac{1}{12}\pi h^3$ e, utilizando diferenciais $dV = \dfrac{1}{4}\pi h^2 dh$.

Figura 6.1:

Dividindo esta última igualdade por dt, obtém-se $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{1}{4}\pi h^2 \dfrac{dh}{dt}$ então quando $h = 8m$ segue $5\,m^3/s = \dfrac{1}{4}\pi\ (8m)^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{20}{64\pi}\ m/s = \dfrac{5}{16\pi}\ m/s = 0,0995\,m/s$.

Portanto, sobe o nível da água no instante em que a profundidade da água é de $8\,m$ com uma velocidade de $0,0995m/s$

6.1.2 Aceleração instantânea

A aceleração é uma medida da variação da velocidade. Quando uma partícula tem movimento retilíneo com velocidade constante, a aceleração é nula (zero). Por exemplo, em uma competição da *Fórmula 1*, os veículos passam pelo ponto de partida com velocidade uniforme, digamos $200km/h$. Oito segundos após um de eles está correndo com velocidade de $300\,km/h$, a *aceleração média* desse auto é:

$$\frac{300 - 200}{8} = 12,5\,(km/h)/seg$$

As unidades parecem bastante estranhas desde que a velocidade está expressa em km/h e o tempo em *segundos*, transformando km/h para m/seg, temos que a *aceleração*

média desse auto é:

$$\frac{300-200}{8} = 12,5\,(km/h)/s = 12,5\,(1000m/3600seg)/seg = 3,472\,m/seg^2$$

Definição 6.3. *Aceleração instantânea.*
Se $S(t)$ dá a posição no instante t de um objeto se movendo em linha reta, então a aceleração instantânea ou simplesmente a aceleração $a(t)$ do objeto no instante t é dada por: $a(t) = v'(t)$, onde $v(t)$ é a velocidade no instante t.

Exemplo 6.5.

Dois carros partem ao mesmo tempo de um ponto A, um para o oeste a $80km/h$ e o outro para o norte a $45km/h$. Com que velocidade aumenta a distância entre ambos $3hs$ depois da saída?

Solução.

Suponha tenham percorrido t horas, segundo a *Figura* (6.2) e aplicando o teorema de Pitágoras, temos a distância entre eles: $d(t) = \sqrt{(80t)^2 + (45t)^2} = 5t\sqrt{337}$. A velocidade com que aumenta a distância entre eles é $d'(t) = 5\sqrt{337}km/h = 91,78km/h$.

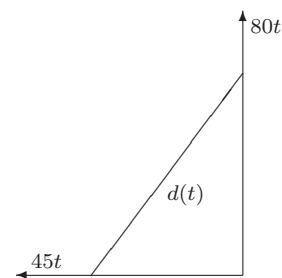



Figura 6.2:

Exemplo 6.6.

Determine a aceleração de um objeto em queda livre cuja função posição é: $S(t) = -4,9t^2 + 40$.

Solução.

Pela definição de velocidade instantânea, sabemos que $v(t) = -9,8t$; portanto a aceleração é $a(t) = -9,8m/s^2$.

Esta aceleração denotada por g é devida à gravidade; seu valor exato depende do lugar da posição do experimento. Em geral a posição de um objeto em queda livre (desprezando a resistência do ar) sob a influência da gravidade é $S(t) = gt^2 + v_0t + s_0$, onde g é a gravidade da terra, v_0 é a velocidade inicial e s_0 é a altura inicial.

Exemplo 6.7.

Suponhamos que o rendimento r em % de um aluno neste exame de duas horas seja dada pela função $r(t) = 300t(2-t)$. Pede-se: **a)** *Em que momento aumenta o diminue o rendimento?* **b)** *Em que momento o rendimento é nulo?* **c)** *Em que instante se obtêm o maior rendimento? Qual é aquele?*

Solução.

a) Temos $t \in [0,\ 2]$, a derivada $r'(t) = 300(2 - 2t)$ quando $t = 1$ temos $r(1) = 300$ e $r'(t) < 0$ em $[1, 2]$.

O rendimento aumenta na primeira hora da prova, e diminue na segunda hora da prova.

b) O rendimento é nulo exatamente no início e no final da prova.

c) O maior rendimento se obtêm exatamente uma hora após iniciado a prova. O maior rendimento é 300.

Exemplo 6.8.

Uma partícula movimenta-se em linha reta segundo a relação: $S = 3t^3 - 16t^2 + 108t + 132$*, onde s é a distância, em metros e t é o tempo em segundos. Qual é a velocidade quando t = 2 ? E qual é a aceleração quando t = 3 ?*

Solução.

Seja $v(t)$ a velocidade instantânea, então $v(t) = 9t^2 - 32t + 108$; quando $t = 2$ obtemos $v(2) = 80$ isto significa que, a velocidade quando $t = 2$ é $80\, m/seg$.

A aceleração é dada pela relação $a(t) = 18t - 32$, quando $t = 3$ temos que $a(3) = 22$, significa que a aceleração no instante $t = 3$ é $22\, m/seg^2$.

Exercícios 6-1

1. A altura de uma bola t segundos depois de seu lançamento vertical é dada pela função: $h(t) = -16t^2 + 48t + 32$. **(a)** Verifique que $h(1) = h(2)$. **(b)** Segundo o teorema de Rolle, determine a velocidade instantânea no intervalo $[1,\ 2]$.

2. O custo $C(x)$ de pedido de uma mercadoria é dada por : $C(x) = \dfrac{10(x^2 + x + 2)}{x^2 + 2x}$ onde C é medido em milhares de reais e x é o tamanho do pedido medido em centenas. **(a)** Verifique que $C(4) = C(6)$. **(b)** Segundo o teorema de Rolle, a taxa de variação de custo deve ser zero para algum pedido no intervalo $[4,\ 6]$. Determine o tamanho desse pedido.

3. Seja a função real: $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x + 1}{x + a} & \text{se,} \quad x < 1 \\ x^3 + bx^2 - 5x + 3 & \text{se,} \quad 1 \leq x \leq \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{x + 2}{x^2 - 9} & \text{se,} \quad x > \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

   1. Suponha f seja diferenciável no intervalo $(-\infty,\ \frac{3}{2})$; determine a e b.

   2. Achar a n-ésima derivada da função f em $x = 2$.

4. Um avião a uma altura de $3000m$ está voando horizontalmente a $500km/h$, e passa diretamente sobre um observador. Determine a velocidade com que se aproxima do observador no instante em que está a $5.000m$ do dele.

5. Um tanque tem a forma de um cone com o vértice para abaixo e mede $12\,m$ de altura e $12\,m$ de diâmetro. Bombeia-se água à razão de $4\,m^3/min$. Calcular a razão com que o nível de água sobe: **a)** Quando a água tem $2\,m$ de profundidade. **b)** Quando a água tem $8\,m$ de profundidade.

6. Escrever as equações da reta tangente e normal à catenária $y = \cosh\left[\dfrac{x}{2}\right]$, no ponto $x = 2\text{Ln}2$.

7. Num instante dado, os catetos de um triângulo reto são $8cm$ e $6cm$, respectivamente. O primeiro cateto decresce à razão de $1cm$ por minuto, e o segundo cresce à razão de $2cm$ por minuto. Com que velocidade cresce a área depois de dois minutos?

8. Uma bola enche-se de ar a razão de $15cm^3/sg$. Com que velocidade esta crescendo o diâmetro depois de 5 segundos? Supor que o diâmetro é zero no instante zero.

9. Um corpo em queda livre percorre uma distância D que varia com o tempo segundo a equação: $D(t) = 4,9t^2$ (distância em metros e t em segundos). **a)** Calcular a taxa de variação de d (distância) em relação a t entre t_1 e t_2 nos seguintes intervalos: $(1s,\ 1.5s)$, $(1s,\ 1.3s)$. **b)** Calcular a velocidade instantânea no instante $t = 1S$.

10. Um ponto se move ao longo de uma curva $y = \sqrt{1+x^2}$ de modo que $\dfrac{dx}{dt} = 4$. Achar $\dfrac{dy}{dt}$ quando $x = 3$.

11. Uma escada com $6m$ de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada começa a se deslizar horizontalmente, à razão de $0,6m/s$, com que velocidade o topo da escada desce a parede, quando está a $4m$ do solo?

12. A altura de um objeto t segundos após de ser largado a $150m$ do solo é dada pela função: $f(t) = 150 - 4,9t$. **(a)** Encontre a velocidade média do objeto durante os três primeiros segundos. **(b)** Mediante o T.V.M. verificar que em algum instante durante os três primeiros segundos de queda, a velocidade instantânea é igual à velocidade média. Encontre esse instante.

13. Uma bola de bilhar é atingida e move-se em linha reta. Se Scm é a distância da bola de sua posição inicial em t segundos, onde $S = 100t^2 + 100t$. Se vcm/s é a velocidade da bola , então v é a taxa de variação de S com relação a t. Se a bola bate na tabela a $39cm$ da posição inicial ,com que velocidade ela bate na tabela?

14. Um foguete é lançado verticalmente para cima, e está S metros acima do solo, t segundos após o lançamento, onde $S = 560t - 16t^2$ é a direção positiva para cima. Se $v\ m/s$ é a velocidade do foguete, então v é a taxa de variação de S em relação a t . **(a)** Ache a velocidade do foguete $2seg.$ após o lançamento; **(b)** Se a altura máxima é atingida quando a velocidade é zero, ache quanto tempo demora para o foguete atingir sua altura máxima.

15. Um carro tem que se trasladar do ponto A até o ponto B (ver Figura). O ponto B se encontra a 36km de uma estrada reta. Sobre a estrada o carro percorre a uma velocidade constante de 100km/h, entanto que no terreno sua velocidade é de 80km/h. Qual é o percorrido que o condutor deve seguir para que o tempo em ir de A até B seja o mínimo? Qual o tempo que demora para percorrer de A até B?

6.2 Estudo do gráfico de funções

Estudaremos aplicações sobre propriedades de derivação, obtendo novas propriedades que nos permitiram estudar a variação de uma função determinando intervalos de crescimento ou decrescimento, pontos de extremo, intervalos de concavidade e pontos de inflexão.

6.2.1 Função crescente. Função decrescente

Definição 6.4.
Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função, e* $I \subseteq \mathrm{D}(f)$.

a) Dizemos que $f(x)$ é *crescente em I* quando, $\forall\, x_1,\ x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) \leq f(x_2)$.

b) Dizemos que $f(x)$ é *decrescente em I* quando, $\forall\, x_1,\ x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) \geq f(x_2)$.

c) Dizemos que $f(x)$ é *estritamente crescente em I* quando, $\forall\, x_1,\ x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) < f(x_2)$.

d) Dizemos que $f(x)$ é *estritamente decrescente em I* quando, $\forall\, x_1,\ x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) > f(x_2)$.

Propriedade 6.1.
Suponha $f : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *seja uma função contínua em* $[a,\ b]$ *com derivada em* $(a,\ b)$, *temos:*
i) *Se* $f'(x) > 0, \quad \forall\, x \in (a,\ b)$; *então* f *é crescente em* $[a,\ b]$.
ii) *Se* $f'(x) < 0, \quad \forall\, x \in (a,\ b)$; *então* f *é decrescente em* $[a,\ b]$.

Demonstração. **(i)**
Sejam $x_1,\ x_2 \in [a,\ b]$ com $x_1 < x_2$. As condições **(a)** e **(b)** da *Propriedade* (6.1) são verificadas no subintervalo $[x_1,\ x_2]$ de $[a,\ b]$; logo, pelo **T.V.M.** Existe $c \in (x_1,\ x_2)$ tal que $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(c)$.
Como $c \in (x_1,\ x_2)$, então $c \in (a,\ b)$; logo, pela hipótese $f'(c) > 0$, e como $x_2 - x_1 > 0$ segue, $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(c) > 0$.
Logo, $\forall\, x_1,\ x_2 \in [a,\ b]$ com $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) < f(x_2)$ e f é crescente em $[a,\ b]$.□

Demonstração. **(ii)**
Exercício para o leitor. □

Propriedade 6.2. *Condição suficiente de extremo com a derivada* 1^a.

Seja $y = f(x)$ *uma função definida numa vizinhança* $B(c, \delta)$ *do ponto* $x = c$*, contínua em* $B(c, \delta)$ *e com derivada em* $B(c, \delta)$*, exceto possivelmente em* $x = c$ *então:*

a) *Se* $f'(x) > 0, \forall x \in (c - \delta, c)$ *e* $f'(x) < 0, \forall x \in (c, c + \delta)$*, então* $f(c)$ *é ponto de máximo local de* f*.*

b) *Se* $f'(x) < 0, \forall x \in (c - \delta, c)$ *e* $f'(x) > 0, \forall x \in (c, c + \delta)$*, então* $f(c)$ *é ponto de mínimo local de* f*.*

Demonstração. **(a)**

Das hipóteses e da *Propriedade* (6.1), segue que f é crescente em $(c-\delta, c)$ e decrescente em $(c, c+\delta)$; logo $f(x) \leq f(c)\ \forall x \in B(c, \delta)$ e deduz-se da *Definição* (6.4) que $f(c)$ é um máximo local de f. □

*Demonstração.***(b)**

Exercício para o leitor. □

Observação 6.1. *Critério da derivada* 1^a.

A Propriedade (6.2) *permite estabelecer o seguinte critério para determinar os máximos ou mínimos relativos de uma função contínua.*

1^o Determinar os pontos críticos de f.

2^o Se c é um ponto crítico, deve-se determinar o sinal de $f'(x)$, primeiro para valores próximos à esquerda de c e logo para valores à direita de c.

3^o Se o sinal muda de $+$ para $-$, então $f(c)$ é máximo relativo; e se o sinal muda de $-$ para $+$; então $f(c)$ é ponto de mínimo relativo.

4^o Se não existe mudança de sinal, então não existe nem máximo nem mínimo relativo em $x = c$.

Propriedade 6.3. *Condição suficiente de extremo com a derivada* 2^a

Seja $y = f(x)$ *uma função com derivada de segunda ordem contínua em uma vizinhança* $B(c, \delta)$ *de* $x = c$*, de modo que* $f'(c) = 0$ *e* $f'(c) \neq 0$ *então:*

i) Se $f''(c) > 0$, então $f(c)$ é ponto de mínimo local de f.

ii) Se $f''(c) < 0$, então $f(c)$ é ponto de máximo local de f.

Demonstração. **(a)**

Da definição de derivada segue, $f''(c) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f'(c+h) - f'(c)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f'(c+h)}{h}$, pois $f'(c) = 0$.

Por hipótese $f''(x)$ é contínua em $x = c$ e $f''(c) > 0$, então $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'(c+h)}{h} > 0$, logo temos para $h > 0$, (suficientemente pequeno) $f'(x) > 0, \quad \forall\, x \in (c,\ c+\delta)$.

De modo análogo, para $h < 0$ (suficientemente pequeno) temos $f'(c+h) < 0$ o que implica $f'(x) < 0, \quad \forall\, x \in (c-\delta,\ c)$; aplicando a *Propriedade* (6.2) para a função $f'(x)$ resulta que $f(c)$ é um mínimo local de f. □

Demonstração. **(b)**

Exercício para o leitor. □

Observação 6.2. *Critério da derivada* 2^a*.*

A Propriedade (6.3) *permite estabelecer o seguinte critério para determinar os máximos ou mínimos relativos de uma função contínua.*

1^o Determinar os pontos críticos de f.

2^o Determinar a derivada segunda de f.

3^o Para cada ponto $x = c$ crítico determinar $f''(c)$.

4^o Se $f''(c)$ é positivo, então $f(c)$ é ponto de mínimo relativo.

5^o Se $f''(c)$ é negativo, então $f(c)$ é ponto de máximo relativo.

6^o Se $f''(c)$ é zero ou não existe, o critério é inconsistente.

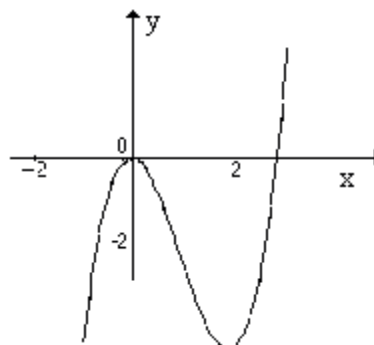



Figura 6.3:

Exemplo 6.9.

Determine os intervalos de crescimento e os extremos relativos da função $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Solução.

Temos $f'(x) = 3x(x-2)$; quando $f'(x) = 0$ resulta $x = 0$ e $x = 2$ assim, 0 e 2 são pontos críticos. Aplicando a *Propriedade* (6.1) construamos a tabela.

Intervalos	Sinal de $f'(x)$	Comportamento	Extremos
$(-\infty,\ 0)$	$+$	crescente	$f(0) = 0$ máx. relat.
$(0,\ 2)$	$-$	decrescente	
$(2,\ +\infty)$	$+$	crescente	$f(2) = -4$ mín. relat.

O gráfico da função é mostrada na *Figura* (6.3).

Exemplo 6.10.

Determine os intervalos de crescimento e os extremos relativos da função $g(x) = \dfrac{6}{x} + \dfrac{x}{6}$.

Solução.

Temos o $\text{D}(g) = \mathbb{R} = \{0\}$, $g'(x) = \dfrac{(x-6)(x+6)}{6x^2}$ quando $g'(x) = 0$ obtémos os pontos críticos $x = 6$ e $x = -6$; o ponto $x = 0$ não é ponto crítico por não pertencer ao domínio $\text{D}(g)$; porém devemos considerar-l0 por ser ponto de descontinuidade. Considere-se a seguinte tabela:

Intervalos	Sinal de $f'(x)$	Comportamento	Extremos
$(-\infty,\ -6)$	$+$	crescente	$f(-6) = -2$ máx. relat.
$(-6,\ 0)$	$-$	decrescente	
$(0,\ 6)$	$-$	decrescente	$f(6) = 2$ mín. relat.
$(0,\ +\infty)$	$+$	crescente	

Exemplo 6.11.

Seja a função $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+3)}$, *determine os pontos de extremos relativos.*
Solução.

O domínio $\text{D}(f) = \mathbb{R}$, e $f'(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt[3]{x(x+3)^2}}$, quando $f'(x) = 0$ temos os pontos críticos são: $0,\ -2$ e -3.

Observe, em $x = -3$ e $x = 0$ a derivada não existe (é infinita). Aplicando a *Propriedade* (6.2), para o cálculo dos intervalos de crescimento ou decrescimento, segundo a seguinte tabela, temos:

Intervalos	Sinal de $f'(x)$	Comportamento	Extremos
$(-\infty,\ -3)$	$+$	crescente	
$(-3,\ -2)$	$+$	decrescente	$f(-2) = \sqrt[3]{4}$ máx. relat.
$(-2,\ 0)$	$-$	crescente	$f(0) = 0$ mín. relat.
$(0,\ +\infty)$	$+$	crescente	

Exemplo 6.12.

Uma empresa apurou que sua receita total (em reais) com a venda de um produto admite como modelo $R = -x^3 + 450x^2 + 52.500x$, *onde* x *é o número de unidades produzidas. Qual o nível de produção que gera a receita máxima?*
Solução.

Temos $R = -x^3 + 450x^2 + 52.500x$, logo $R' = -3x^2 + 900x + 52500$; resolvendo $R'(x) = -3x^2 + 900x + 52500 = 0 \quad \Rightarrow \quad -3(x^2 - 300x - 17500) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3(x - 350)(x + 50) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 350$ ou $x = -50$.

Observe, $R''(x) = -6x + 900 \quad \Rightarrow \quad R''(350) < 0$, assim quando $x = 350$ o nível de produção gera a receita máxima.

Exemplo 6.13.

Determine os intervalos de crescimento e os extremos relativos da função $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$.

Solução.

Observe, $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$, em virtude da *Propriedade* (6.2) $f'(x) = 0$ implica $x = 3$ e $x = -1$, e segundo a seguinte tabela:

Intervalos	Sinal de $f'(x)$	Comportamento	Extremos
$(-\infty, -1)$	$+$	crescente	$f(-1) = 7$ máx. relat.
$(-1, 3)$	$-$	decrescente	$f(3) = -25$ mín. relat.
$(3, +\infty)$	$+$	crescente	

Exemplo 6.14.

Seja a função $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$ *determine os extremos relativos.*

Solução.

Temos $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$, $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x-2)^2}$ o único ponto crítico é $x = 2$. Logo:

Intervalos	Sinal de $f'(x)$	Comportamento	Extremos
$(-\infty, 0)$	$-$	decrescente	$f(0) = 0$ mín. relat.
$(0, 2)$	$+$	decrescente	
$(2, +\infty)$	$-$	crescente	

A reta $x = 2$ é assíntota vertical da curva como mostra a *Figura* (6.4).

Figura 6.4:

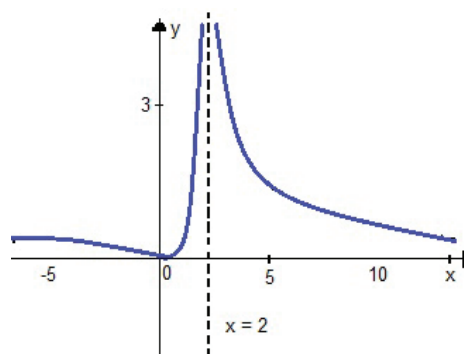
Exemplo 6.15.

Seja $a > 0$, *mostre que o máximo absoluto da função:*

$$f(x) = \frac{1}{1+ \mid x \mid} - \frac{1}{1+ \mid x - a \mid} \quad \text{é} \quad \frac{2+a}{1+a}$$

Solução.

Lembre, se $g(x) = \mid x \mid$, então:

$g'(x) = \dfrac{x}{\mid x \mid}$; logo temos $f'(x) = \dfrac{1}{(1+ \mid x - a \mid)^2} \cdot \dfrac{(x-a)}{\mid x - a \mid} - \dfrac{1}{(1+ \mid x \mid)^2} \cdot \dfrac{x}{\mid x \mid}$, o que

implica que a derivada não existe em $x = 0$ e em $x = a$.

Quando $f'(x) = 0$ então $\dfrac{1}{(1+\mid x-a\mid)^2}\cdot\dfrac{(x-a)}{\mid x-a\mid} = \dfrac{1}{(1+\mid x\mid)^2}\cdot\dfrac{x}{\mid x\mid}$ onde $x = \dfrac{a}{2}$; assim os pontos críticos são 0, $\dfrac{a}{2}$ e a

Intervalos	Sinal de $f'(x)$	Comportamento	Extremos
$(-\infty,\ 0)$	$+$	crescente	máx. local em $f(0)$
$(0,\ \frac{a}{2})$	$-$	decrescente	mín. local em $f(\frac{a}{2})$
$(\frac{a}{2},\ a)$	$+$	crescente	máx. local em $f(a)$
$(a,\ +\infty)$	$-$	decrescente	

Temos $f(0) = 1 + \dfrac{1}{1+a} = \dfrac{2+a}{1+a}$; $f(\dfrac{a}{2}) = \dfrac{4}{2+a}$ e $f(a) = \dfrac{2+a}{1+a}$, considerando que f é contínua e do fato $f(\dfrac{a}{2}) < f(0) = f(a)$ concluímos que o máximo absoluto de $f(x)$ é $f(a) = \dfrac{2+a}{1+a}$.

Exemplo 6.16.

Determine os valores de a, b e c de modo que a função $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ tenha extremo relativo em $x = \dfrac{1}{2}$, e que a equação da tangente no ponto de abscissa $x = -1$ seja $2x - y + 4 = 0$.

Solução.

A derivada $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ como $x = \dfrac{1}{2}$ é ponto críticotemos $f'(\dfrac{1}{2}) = 4a(\dfrac{1}{2})^3 + 2b(\dfrac{1}{2}) = 0$ assim $\dfrac{a}{2} + b = 0$.

Por outro lado, $m = 2$ é o coeficiente angular da reta tangente quando $x = -1$, então $f'(-1) = -4a - 2b = 2$.

Na reta tangente, quando $x = -1$temos $y = 2$ e na função, $f(-1) = a + b + c = 2$.

Resolvendo as três igualdades: $\dfrac{a}{2} + b = 0$, $\quad -4a - 2b = 2$ e $a + b + c = 2$ segue $a = -\dfrac{2}{3}$, $b = \dfrac{1}{3}$ e $c = \dfrac{7}{3}$.

Portanto, $f(x) = -\dfrac{2}{3}x^4 + \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{7}{3}$.

Observação 6.3. *Critério para os extremos absolutos de uma função contínua num intervalo fechado.*

Se f é uma função contínua no intervalo $[a,\ b]$, pelo Teorema de Weierstrass, f apresenta extremos absolutos. Para o cálculo de seus extremos, considerando que estes podem estar nos extremos do intervalo, é suficiente adicionar os pontos a e b aos pontos críticos de f, logo comparar os valores que f assume em cada um destes pontos críticos, o maior é o máximo absoluto e o menor o mínimo absoluto.

Exemplo 6.17.

Determine os valores máximos e mínimos absolutos da função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 10$ *em* $[0,\ 4]$.

Solução.

Observe, $f(x)$ é contínua no intervalo $[0, 4]$, e $f'(x) = 3(x-2)(x+4)$; logo seus pontos críticos são 2 e -4. Por outro lado, $f(2) = -38$ e $-4 \notin [0,\ 4]$.

Portanto, mediante o gráfico temos que $f(2) = -38$ é ponto de mínimo absoluto no intervalo $[0,\ 4]$.

Exemplo 6.18.

Se $g(x) = -\dfrac{4 \mid x \mid}{1 + x^2}$, *determine os valores máximos e mínimos absolutos*

Solução.

Temos $g(x)$ contínua em $[-4,\ 2]$ e $g'(x) = \dfrac{4 \mid x \mid (x^2 - 1)}{\mid x \mid (1 + x^2)^2}$ os pontos críticos são $-4,\ -1,\ 0,\ 1$ e 2.

Por outro lado, $g(-4) = -\dfrac{16}{17}$, $g(-1) = -2$, $g(0) = 0$, $g(1) = -2$ e $g(2) = -\dfrac{8}{5}$.

Portanto, o valor máximo absoluto é $0 = g(0)$, e o valor mínimo absoluto é $-2 = g(-1) = g(1)$.

Exemplo 6.19.

Determine o valor máximo da função $y = \text{sen}x\,\text{sen}2x$.

Solução.

Desde que $\text{sen}2x = 2\text{sen}x \cos x$, temos $y = \text{sen}x\,\text{sen}2x = 2\cos x\,\text{sen}^2 x = 2\cos x(1 - \cos^2 x)$. Considere $z = \cos x$, logo $-1 \leq z \leq 1$. A função $g(z) = z - z^3 = z(1 - z^2)$ assume valores negativos no intervalo $-1 \leq z < 0$, é igual a zero se $z = 0$, e assume valores positivos no intervalo $0 < z \leq 1$.

Quando $g(z) = z(z - z^2)$ então $g'(z) = 1 - 3z^2$, fazendo $g'(z) = 0$ segue $z = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ são pontos críticos; $g(z)$ tem valor máximo relativo em $z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Logo a função $y = \text{sen}x\text{sen}2x$ alcança seu valor máximo nos pontos nos quais $z = \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ este valor acontece quando $x = \dfrac{4}{3\sqrt{3}} \approx 0,777$.

Exemplo 6.20.

Mostre que a função $f(x) = x^\beta - ax$ *alcança seu valor mínimo igual a* $(1-\beta)\sqrt[\beta-1]{\left[\dfrac{a}{\beta}\right]^\beta}$, *no ponto* $x = \sqrt[\beta-1]{\left[\dfrac{a}{\beta}\right]}$, *sempre que* $a > 0,\ \beta > 1,\ x > 0$.

Solução.

Da função $f(x) = x^\beta - ax$ segue $f'(x) = \beta x^{\beta-1} - a$, quando $f'(x) = 0$, então $x = \sqrt[\beta-1]{\left[\frac{a}{\beta}\right]}$. Por outro lado, a derivada segunda de $f(x)$ é $f''(x) = \beta(\beta-1)x^{\beta-2} > 0$ pela hipótese de β.

O critério da derivada segunda permite afirmar que $f(x)$ atinge seu valor mínimo igual a $(1-\beta)\sqrt[\beta-1]{\left[\frac{a}{\beta}\right]^\beta}$, no ponto $x = \sqrt[\beta-1]{\left[\frac{a}{\beta}\right]}$.

Propriedade 6.4. *Desigualdade de Holder.*

Se $p > 1,\quad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1,\quad x > 0$ *e* $y > 0$, *temos* $\quad xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.

Demonstração.

Pelo *Exemplo* (6.20), se $\beta > 1,\ a > 0$ e $x > 0$, para a função $f(x) = x^\beta - ax$ temos que $f(x) \geq f\left(\sqrt[\beta-1]{\left[\frac{a}{\beta}\right]}\right)$, isto é

$$x^\beta - ax > (1-\beta)\sqrt[\beta-1]{\left[\frac{a}{\beta}\right]^\beta} \tag{6.2}$$

Considerando nesta desigualdade $\beta = p$ e $a = py$, encontramos em (6.2) $x^p - (py)x > (1-p)\sqrt[p-1]{\left[\frac{py}{p}\right]^p} = (1-p)\sqrt[p-1]{y^p}$.

Como $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ resulta $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p} = \dfrac{p-1}{p} \quad \Rightarrow \quad q = \dfrac{p}{p-1},\ p - 1 = \dfrac{p}{q}$, então $x^p - pyx \geq -\dfrac{p}{q}y^q$ de onde $xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{x^q}{q}$. □

Exemplo 6.21.

Seja $a > 0$, *mostre que o valor máximo da função* $f(x) = \dfrac{1}{1+\mid x \mid} + \dfrac{1}{1+\mid x-a \mid}$ *atinge quando* $x = \dfrac{2+a}{1+a}$.

Solução.

Temos $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+a-x}, & \text{se,} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+a-x}, & \text{se,} \quad 0 < x < a \\ \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-a+x}, & \text{se,} \quad a < x \end{cases}$

de onde

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{(1+a-x)^2}, & \text{se,} \quad x < 0 \\ \dfrac{-1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{(1+a-x)^2}, & \text{se,} \quad 0 < x < a \\ \dfrac{-1}{(1+x)^2} - \dfrac{1}{(1-a+x)^2}, & \text{se,} \quad a < x \end{cases}$$

Observe, $f(x)$ cresce no intervalo $(-\infty,\ 0)$ e decresce no intervalo $[a,\ +\infty)$, logo o máximo de $f(x)$ acontece no intervalo $[0,\ a]$.

Quando $f'(x) = 0$, para $x \in (0,\ a)$ então $(1+x)^2 - (1-x+a)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{a}{2}$. Como $f(\dfrac{a}{2}) = \dfrac{4}{2+a} < \dfrac{2+a}{1+a} = f(0) = f(a)$, o máximo é $\dfrac{2+a}{1+a}$.

Exemplo 6.22.

Um comerciante vende 2.000 *unidades por mês ao preço de R*\$10,00 *cada. Ele pode vender mais* 250 *unidades por mês para cada R*\$0,25 *da redução no preço. Qual o preço unitário que maximizará a receita?*
Solução.

Seja q o número de unidades vendidas em um mês, consideremos p o preço unitário, e R a receita mensal, supondo em condições de livre concorrência, a receita é dada por $R = qp$; quando p preço $p = 10$ temos $q = 2.000$ e, quando $p = 10,00 - 0,25 = 9,75$ temos que $q = 2.250$.

Com esta informação podemos obter o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $(10,\ 2.000)$ e $(9,75;\ 2250)$ onde

$$m = \frac{p-10}{q-2.000} = \frac{10-9,75}{2.000-2.250}$$

logo $p = -0,001q + 12$; considerando esta última igualdade na equação da receita obtemos $R = q(-0,001 \times q + 12) \quad \Rightarrow \quad R' = 12 - 0,002q \quad \Rightarrow \quad q = 6.000$ observe, $R'' = -0,002 < 0$.

Quando $q = 6.000$ o nível de produção proporciona receita máxima; neste caso $p = 12 - 0,001(6.000) = 6$ reais.

6.2.2 Assíntotas

Em matemática, uma assíntota de uma curva $\mathcal{C}$ é um ponto ou uma curva de onde os pontos de $\mathcal{C}$ se aproximam à medida que se percorre $\mathcal{C}$. Quando $\mathcal{C}$ é o gráfico de uma função, em geral o termo assíntota refere-se a uma reta.

Consideremos uma curva qualquer $\mathcal{C}$ determinada pelo gráfico da função $y = f(x)$, e um ponto A que se movimenta ao longo dessa curva.

Definição 6.5.
Dizemos que o ponto $A \in \mathbb{R}^2$ tende (converge) ao infinito se, a distância entre o ponto A e a origem de coordenadas $(0,\ 0)$ tende ao infinito (a distância cresce indefinidamente)

Definição 6.6.

Seja A um ponto que se movimenta ao longo de uma curva $y = f(x)$ e d a distância entre A e uma reta L. Se acontece que o ponto A tende ao infinito e, a distância d tende a zero, dizemos que a reta L é uma de assíntota da curva $y = f(x)$; isto é $\lim\limits_{A\to+\infty} d(A,\ L) = 0$. (Figura (6.5))

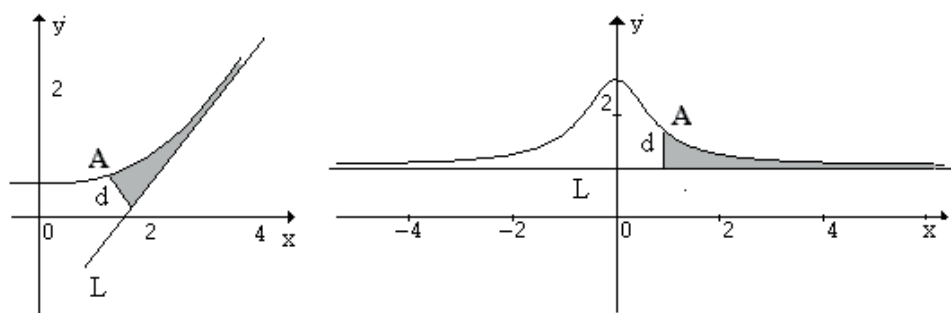



Figura 6.5:

Propriedade 6.5.

A reta $x = a$ é uma assíntota vertical da curva $y = f(x)$ se cumpre um dos seguintes enunciados:

1^o $\quad \lim\limits_{x\to a} .f(x) = \pm\infty$

2^o $\quad \lim\limits_{x\to a^+} .f(x) = +\infty$ (*Figura* (6.6))

3^o $\quad \lim\limits_{x\to a^-} .f(x) = -\infty$ (*Figura* (6.7))

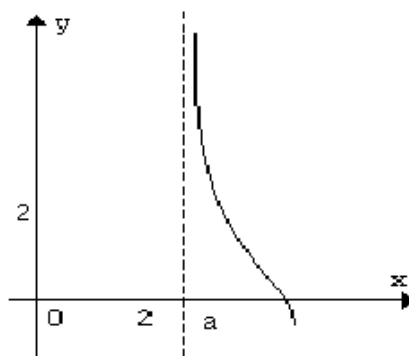
A demonstração obtêm-se com facilidade da definição de assíntota.

$$\lim_{x\to a^+} .f(x) = +\infty$$

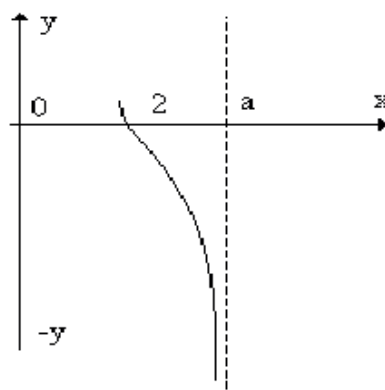
Figura 6.6:

$$\lim_{x\to a^-} .f(x) = -\infty$$

Figura 6.7:

Propriedade 6.6.

A reta $y = k$ *é uma assíntota horizontal da curva* $y = f(x)$ *se cumpre um dos seguintes enunciados:*

1^o $\quad \lim\limits_{x\to\infty} .f(x) = k$

2^o $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} .f(x) = k$ (*Figura* (6.8))

3^o $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} .f(x) = k$ (*Figura* (6.9))

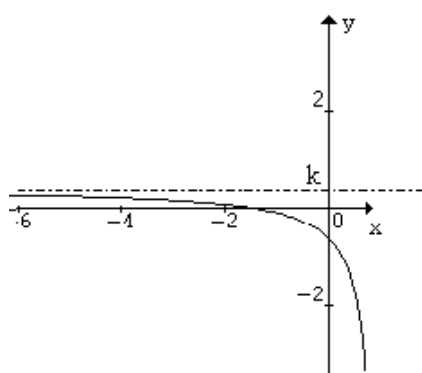
A demonstração é óbvia.

$\lim\limits_{x\to-\infty} .f(x) = k$

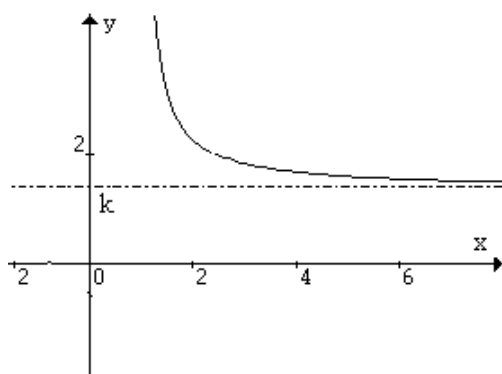
Figura 6.8:

$\lim\limits_{x\to+\infty} .f(x) = k$

Figura 6.9:

Propriedade 6.7.

A reta $y = mx + b, \quad m \neq 0$ *é uma assíntota oblíqua da curva* $y = f(x)$ *se e somente se cumpre uma das seguintes condições:*

1^o $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{f(x)}{x}\right] = m \quad \text{e} \quad \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - mx] = b \qquad$ (*Figura* (6.10))

2^o $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \left[\dfrac{f(x)}{x}\right] = m \quad \text{e} \quad \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - mx] = b \qquad$ (*Figura* (6.11))

Demonstração. **i)**

Suponhamos que a curva $y = f(x)$ tenha uma assíntota oblíqua de equação $y = mx+b$.

Seja $A(x, f(x))$ o ponto que se movimenta ao longo da curva $y = f(x)$; e $C(x, mx+b)$ o ponto da assíntota de abscissa x.

Da definição de assíntota temos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \overline{AB} = 0$; porém

$$\overline{AB} = \overline{AC} \cdot \cos\alpha \qquad \text{e} \qquad \overline{AC} = \mid f(x) - (mx + b) \mid$$

onde $\cos\alpha$ é uma constante diferente de zero.

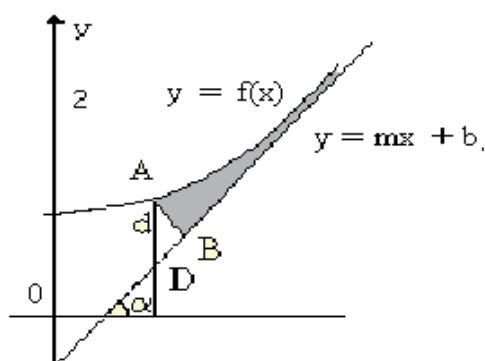



Figura 6.10:

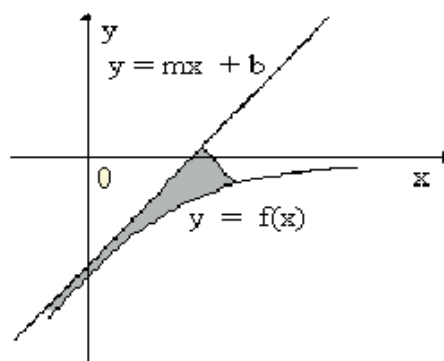



Figura 6.11:

Logo, $\lim\limits_{x\to+\infty}\overline{AB}=0 \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\overline{AB}=0 \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(mx+b)]=0.$

Portanto, temos $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=b.$

Recíprocamente ($\Leftarrow$)

Se $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(mx+b)]=0$ é óbvio que a reta $y=mx+b$ é uma assíntota.

Por outro lado, determinemos m e b.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(mx+b)]=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{(mx+b)}{x}\right]\cdot x=0$$

então deve acontecer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{(mx+b)}{x}\right]=0$ pois $x\to+\infty$ de onde,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-m\right]-\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{b}{x}\right]=0$$

assim, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]=m.$ Sendo m conhecido e considerando $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(mx+b)]=0$ obtemos $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=b.$

Por outro lado, se m e b são números que cumprem as condições

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=m \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=b$$

então $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(mx+b)]=0$ o que implica que a reta $y=mx+b$ é uma assíntota de $y=f(x)$.

Observação 6.4.

Respeito à Propriedade (6.7) *é necessário o seguinte:*

i) Se ao calcular os valores m e b (quando $x\to+\infty$) um dos limites não existe, a curva não apresenta assíntota oblíqua à direita. Resultado similar obtêm-se quando $x\to-\infty$.

ii) Se $m = 0$ e b é infinito, a assíntota é horizontal.

Exemplo 6.23.

Determine as assíntotas da curva determinada pelas equações:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x-2} + \sqrt[3]{x}$ **b)** $g(x) = \dfrac{5x^2-8x+3}{x+5}$

*Solução.**a)***

O domínio $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$.

O cálculo do limite $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x^2+4}{x-2} + \sqrt[3]{x}\right] = \pm\infty$, logo $x = 2$ é assíntota vertical.

Observe, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{x^2+4}{x-2} + \sqrt[3]{x}\right] = \pm\infty$, logo não tem assíntota horizontal.

Para o cálculo de assíntota oblíqua :

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{x^2+4}{x(x-2)} + \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}\right] = 1 = m$

$\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{x^2+4}{x-2} + \sqrt[3]{x} - x\right] = +\infty$, logo não existe assíntota oblíqua.

De modo análogo, não existe assíntota oblíqua quando $x \to -\infty$.

*Solução.***b)**

O domínio $D(g) = \mathbb{R} - \{-5\}$.

Possível assíntota vertical, $x = -5$; o cálculo do limite $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{5x^2-8x+3}{x+5} = \pm\infty$, logo $x = -5$ é assíntota vertical.

Observe, $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{5x^2-8x+3}{x+5} = \pm\infty$, logo não tem assíntota horizontal.

Por outro lado, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5x^2-8x+3}{x(x+5)} = 5$ além disso,

$$\lim_{x\to +\infty}[g(x) - 5x] = \lim_{x\to +\infty}\left[\frac{5x^2-8x+3}{x+5} - 5x\right] = -33$$

Assim $y = 5x - 33$ é assíntota oblíqua.

Para o caso $x \to -\infty$, temos $\lim\limits_{x\ to -\infty}\dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x^2-8x+3}{x(x+5)} = 5$ também

$$\lim_{x\to -\infty}[g(x) - 5x = \lim_{x\to -\infty}\left[\frac{5x^2-8x+3}{x+5} - 5x\right] = -33$$

Portanto, $y = 5x - 33$ é a única assíntota oblíqua.

Exemplo 6.24.

Determine as assíntotas da curva $y = \dfrac{2x^2 - 7x + 1}{x - 2}$*, e traçar os respectivos gráficos.*
Solução.

O domínio $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$.

Intersecções com os eixos.

a) Com o eixo-y: $x = 0$ então $f(0) = -\dfrac{1}{2}$; é o ponto $A(0, -\dfrac{1}{2})$

b) Com o eixo-x: $y = 0$ então $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{41}}{4}$; são os pontos de coordenadas $B(\dfrac{7 + \sqrt{41}}{4}, 0)$ e $C(\dfrac{7 - \sqrt{41}}{4}, 0)$

Cálculo de assíntotas:

a) Verticais:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{2x^2 - 7x + 1}{x - 2} = \frac{-5}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 2^-} \frac{2x^2 - 7x + 1}{x - 2} = \frac{-5}{0^-} = -\infty$$

Logo $x = 2$ é assíntota vertical.

b) Horizontais:

Temos $\lim\limits_{x \to \pm\infty} .f(x) = \pm\infty$.

Logo não tem assíntotas horizontais.

c) Oblíquas:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 7x + 1}{x(x - 2)} = 2.$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \pm\infty} [\frac{2x^2 - 7x + 1}{x - 2} - 2x] =$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3x + 1}{x - 2} = -3$$

Figura 6.12:

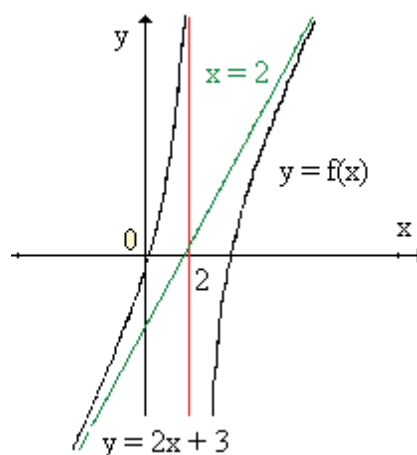
Por tanto a reta $y = 2x - 3$ é uma assíntota à direita e esquerda da curva $y = f(x)$. O gráfico mostra-se na *Figura* (6.12).

Exemplo 6.25.

Determine as assíntotas da curva dada pela equação $g(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 - 9x + 27}$. *Mostre seu respectivo gráfico.*
Solução.

O domínio da função é $D(g) = \mathbb{R}$.

Observe, não temos assíntotas verticais; pois não existe número a tal que o limite $\lim\limits_{x \to a} .g(x) = \pm\infty$ isto é não existe valor real que faz zero o denominador.

Não temos assíntotas horizontais; não existe número c tal que o limite $\lim\limits_{x \to \pm\infty} .g(x) = c$.

Cálculo de assíntotas oblíquas:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} .\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} .\frac{\sqrt[3]{x^3-3x^2-9x+27}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [\sqrt[3]{x^3-3x^2-9x+27} - 1\cdot x] =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-3x^2-9x+27}{(\sqrt[3]{x^3-3x^2-9x+27})^2 + x(\sqrt[3]{x^3-3x^2-9x+27}) + x^2}\right] = -1$$

A reta $y = x - 1$ é assíntota direita e esquerda.

Cálculo de extremos relativos:

$g'(x) = \dfrac{(x+1)(x+3)}{(\sqrt[3]{(x-3)^2(x+3)})^2}$ então $x = -1$, $x = 3$ e $x = -3$ são pontos críticos.

Observe, para h positivo suficientemente pequeno temos $g'(-1+h) < 0$ e $g'(-1-h) > 0$, logo temos máximo relativo no ponto $A(-1,\ \sqrt[3]{32})$; por outro lado, $g'(3-h) < 0$ e $g'(3+h) > 0$, logo em $B(3,\ 0)$ temos mínimo relativo.

O gráfico mostra-se na *Figura* (6.13).

Exemplo 6.26.

Traçar o gráfico da função $f(x) = \sqrt[4]{x^4-5x^3-4x^2+20x}$ *mostrando as assíntotas.*

Solução.

O domínio de definição é, $D(f) = \{\ x \in \mathbb{R}\ /.\ \ x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 20x \geq 0\ \}$, isto é $D(f) = (-\infty,\ -2] \cup [0, 2] \cup [5,\ +\infty)$.

Intersecções com eixos de coordenadas são os pontos $(-2,\ 0)$, $(0,\ 0)$, $(2,\ 0)$ e $(5,\ 0)$.

Não têm assíntotas verticais nem horizontais.

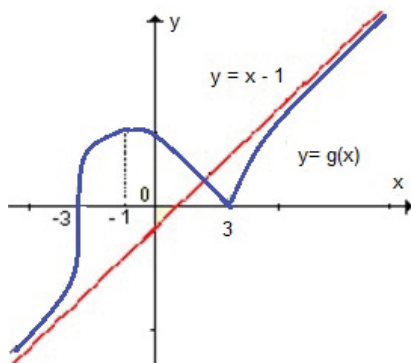



Figura 6.13:

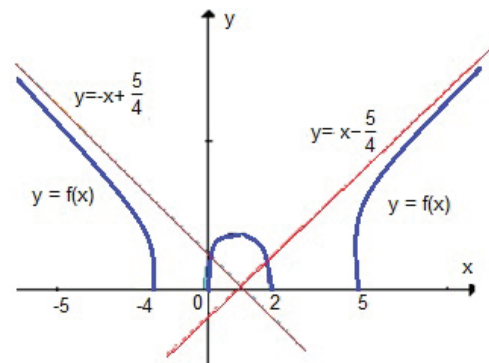



Figura 6.14:

Cálculo de assíntotas oblíquas:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4-5x^3-4x^2+20x}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - 1 \cdot x = \lim_{x\to+\infty}[\sqrt[4]{x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 20x} - x] = -\frac{5}{4}$$

A reta $y = x - \dfrac{5}{4}$ é assíntota oblíqua à direita.

Por outro lado: $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|\,x\,|}{x}\left[\sqrt[4]{1 - \dfrac{5}{x} - \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{20}{x^3}}\right] = -1.$

$$b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - 1 \cdot x] = \lim_{x\to-\infty}[\sqrt[4]{x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 20x} - (-1)x] = \frac{5}{4}$$

A reta $y = -x + \dfrac{5}{4}$ é assíntota oblíqua à esquerda.

O gráfico mostra-se na *Figura* (6.14).

Exemplo 6.27.

Construir o gráfico da curva $y = g(x)$, mostrando suas assíntotas.

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}, & se, \quad x > 0 \\ \dfrac{x^3 - x}{(x+1)(x+4)}, & se, \quad -3 < x \leq 0 \\ -\sqrt{1 + x^2}, & se, \quad x \leq -3 \end{cases}$$

Solução.

O domínio da função $D(g) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Cálculo de assíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to+\infty} .g(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x+3}{x}} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} .g(x) = \lim_{x\to-\infty}(-\sqrt{1+x^2}) = -\infty$$

A única assíntota horizontal é $y = 1$.

Cálculo de assíntotas verticais:

As possíveis assíntotas verticais são os valores de x para os quais o denominador é zero e estes valores são: $x = 0$, $x = -1$, e $x = 4$. Os limites

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{\frac{x+3}{x}} = +\infty; \qquad \lim_{x\to-1} \frac{x^3 - x}{(x+1)(x+4)} = \frac{2}{3}$$

em $x = -4$ não tem sentido calcular pelo fato estar definida $g(x)$ no intervalo real $(-3, 0]$. Logo a única assíntota vertical é $x = 0$.

Assíntotas oblíquas:

Não existe assíntota oblíqua à direita, pois já existe uma assíntota horizontal.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\,|\,x\,|\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}[g(x) - mx] = \lim_{x\to-\infty}[-\sqrt{1+x^2} - x] = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}-x} = 0$$

A única assíntota oblíqua é $y = x$.

O gráfico mostra-se na *Figura* (6.15)

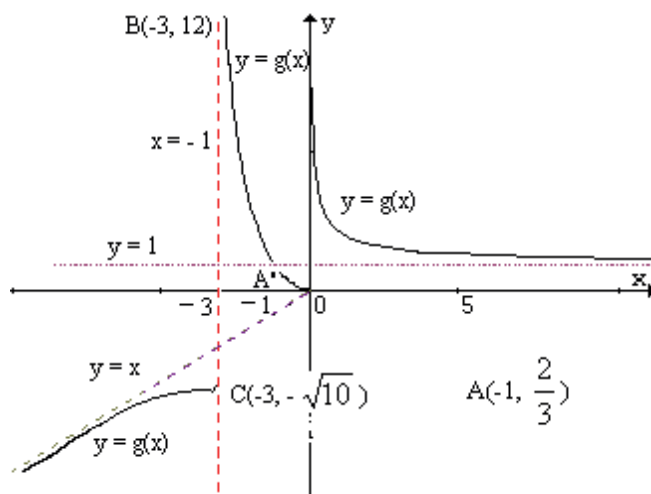



Figura 6.15:

Observação 6.5.

Se a equação de uma curva escreve-se na forma $x = g(y)$, *para obter assíntotas utilizamos os resultados das Propriedades* (6.5) - (6.7) *modificando as variáveis correspondentes. Deste modo:*

i) Se $\lim\limits_{y\to+\infty} .g(y) = k$ ou se $\lim\limits_{y\to-\infty} .g(y) = k$ então a reta $x = k$ é uma assíntota vertical.

ii) Se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{y\to a} .g(y) = \pm\infty$, $\lim\limits_{y\to a^+} .g(y) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{y\to a^-} .g(y) = \pm\infty$, então a reta $y = a$ é uma assíntota horizontal.

iii) A reta $x = ky + b$ é uma assíntota oblíqua se:

$$\lim_{y\to+\infty} .\frac{g(y)}{y} = k \quad \text{e} \quad \lim_{y\to+\infty}[g(y) - ky] = b \qquad \text{ou}$$

$$\lim_{y\to-\infty} .\frac{g(y)}{y} = k \quad \text{e} \quad \lim_{y\to-\infty}[g(y) - ky] = b$$

Exemplo 6.28.

Traçar o gráfico da curva $y^3 - y^2x + y^2 + x = 0$, *mostrando suas assíntotas.*

Solução.

Da equação a curva temos, $x = f(y) = \dfrac{y^2(y+1)}{(y+1)(y-1)}$

A variável y (imagem da função $y = f^{-1}(x)$ pertence ao conjunto de números reais $\mathbb{R} - \{\,-1,\ 1\,\}$.

Assíntotas verticais:

Observe o limite, $\lim\limits_{y\to-\infty} .f(y) = \pm\infty$; logo não existe assíntotas verticais.

Assíntotas horizontais:

São possíveis assíntotas horizontais $y = -1$ e $y = 1$.

$$\lim_{y\to-1} \frac{y^2(y+1)}{(y+1)(y-1)} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{y\to1^+} \frac{y^2(y+1)}{(y+1)(y-1)} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{y\to1^-} \frac{y^2(y+1)}{(y+1)(y-1)} = -\infty$$

então a única assíntota horizontal é $y = 1$.

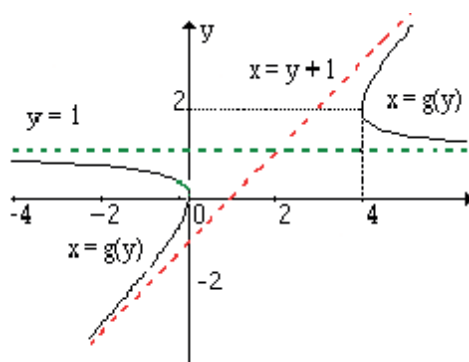



Figura 6.16:

Assíntotas oblíquas:

$$k = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{g(y)}{y} = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{y^2(y+1)}{y(y+1)(y-1)} = 1$$

$$b = \lim_{y\to\pm\infty} [g(y) - ky] = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{y^2(y+1)}{(y+1)(y-1)} - y] = 1$$

logo a única assíntota é $x = y + 1$.

O gráfico mostra-se na *Figura* (6.16)

Exemplo 6.29.

Determine as constantes m *e* n *que cumprem a condição:*

$$L = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{15x^3 + 7x + 4}{3x^2 + 4} - \sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt[3]{8x^3 + 12x^2 + 1} + 2mx - 3n\right] = 0$$

Solução.

Temos $\quad L = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{15x^3 + 7x + 4}{3x^2 + 4} - \sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt[3]{8x^3 + 12x^2 + 1} + 2mx - 3n\right] = 0$

então

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{15x^3+7x+4}{3x^2+4} + (2m-3)x - 3n\right] -$$

$$- \lim_{x\to+\infty}\left[(\sqrt{x^2+4x} - x) + (\sqrt[3]{8x^3+12x^2+1} - 2x)\right] = 0$$

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3(6m+6) - 9nx^2 + x(8m-5) + (4-12n)}{3x^2+4}\right] -$$

$$- \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x} + \frac{12x^2+1}{(\sqrt[3]{8x^3\ldots})^2 + (2x)() + (2x)^2}\right] = 0$$

Quando $m = -1$, logo calculando o limite da segunda parcela

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-9nx^2 - 13x + (4-12n)}{3x^2+4}\right] - \left[\frac{4}{2} + \frac{12}{12}\right] = 0$$

Quando $n = -1$, logo ao calcular o limite da primeira parcela

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{9x^2 - 13x + 16}{3x^2+4}\right] - 3 = 3 - 3 = 0$$

Portanto, os números são: $m = -1$ e $n = -1$.

Exemplo 6.30.

Determine o gráfico da curva $y^3x^2 - y^2 + y + 2 = 0$, *mostrando suas assíntotas.*

Solução.

Observe, $x^2 = \dfrac{y^2-y-2}{y^3}$, de onde $x = \pm\sqrt{\dfrac{y^2-y-2}{y^3}}$.

Ao substituir x por $-x$ na equação original, a mesma não varia, logo é simétrica respeito do eixo-y; então é suficiente analisar $x = \sqrt{\dfrac{y^2-y-2}{y^3}}$.

Derivando implícitamente, $3y^2x^2y' + 2y^3x - 2yy' + y' = 0$, logo $y' = \dfrac{2y^3x}{1+2y-3y^2x^2}$ então $x = 0$ é um ponto.

Quando $x = 0$, $y = 2$ ou $y = -1$; em $(0,\ 2)$ temos máximo relativo e, em $(0,\ -1)$ temos mínimo relativo.

Considerando $x = \sqrt{\dfrac{y^2-y-2}{y^3}} = \sqrt{\dfrac{(y-2)(y+1)}{y^3}}$ então a imagem y pertence ao intervalo $[-1,\ 0)\bigcup[2,\ +\infty)$.

O limite $\lim\limits_{y\to 0}\sqrt{\dfrac{y^2-y-2}{y^3}} = +\infty$; logo $y = 0$ é assíntota horizontal.

Por outro lado, $\lim_{y\to+\infty}\sqrt{\dfrac{y^2-y-2}{y^3}}=0$ então $x=0$ é a única assíntota horizontal.

Não tem assíntotas oblíquas, seu gráfico mostra-se na *Figura* (6.17).

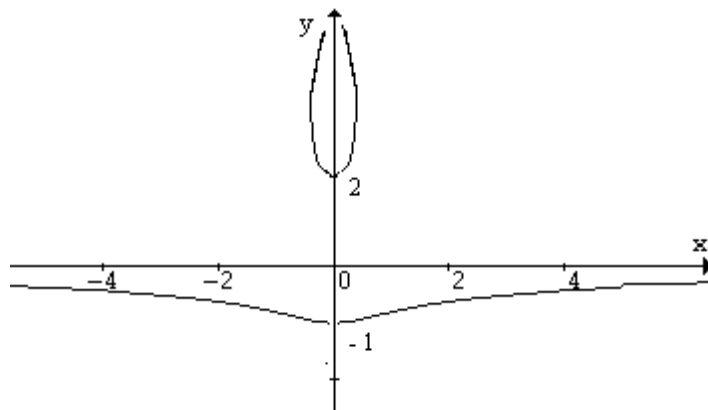



Figura 6.17:

Observação 6.6.

Para o gráfico de curvas podemos utilizar recursos adicionais de pontos críticos e, ou critérios da derivada.

Exercícios 6-2

1. Determinar os intervalos de crescimento, os extremos relativos e esboçar o gráfico das seguintes funções.

1. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$	**2**. $f(x) = x^4 - 14x^2 - 24x + 1$
3. $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^5}$	**4**. $f(x) = \mid x^2 - 9 \mid$
5. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$	**6**. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$
7. $g(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-4x}$	**8**. $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x-5}$
9. $g(x) = 3x^5 - 125x^3 + 2160x$	**10**. $g(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$
11. $h(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$	**12**. $g(x) = x^3 + \dfrac{3}{x}$
13. $f(x) = \dfrac{x^2+2x-33}{x-4}$	**14**. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{1-x+x^2}$
15. $f(x) = \dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$	**16**. $f(x) = \dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$

2. Suponhamos $a_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots n$, para os seguintes exercícios determine os pontos de máximo ou mínimo, caso existir.

   1. $f(x) = (a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2$ para $a \neq b$.

   2. $f(x) = (a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + (a_3 - x)^2 + \cdots + (a_n - x)^2$

   3. $f(x) = (a_1 - 2x^2)^2 + (a_2 - 2x^2)^2 + (a_3 - 2x^2)^2 + \cdots + (a_n - 2x^2)^2$.

   4. $f(x) = (a_1 - x)^r + (a_2 - x)^r + (a_3 - x)^r + \cdots + (a_n - x)^r$.

3. Determine os intervalos de, crescimento e decrescimento para as funções:

   1. $y = x(1 + \sqrt{x})$ **2.** $y = x - 2\text{sen}x$, se $0 \leq x \leq 2\pi$

4. Analisar os extremos das seguintes funções:

   1. $y = (x-5)e^x$ **2.** $y = x\sqrt{1-x^2}$

   3. $y = (x-1)^4$ **4.** $y = 1 - \sqrt[3]{(x-2)^4}$

5. Determinar os valores a, b e c se:

   1. $f(x) = 2x^3 + ax^2 + b$ tem extremo relativo em $(-1,\ 2)$.

   2. $g(x) = ax^2 + bx + c$ tem extremo relativo em $(1,\ 7)$ e o gráfico passa pelo ponto $(2,\ -2)$.

6. Para cada uma das seguintes funções, determine o máximo ou mínimo absoluto nos intervalos indicados.

1. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ em $[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}]$ **2.** $f(x) = \frac{1}{2}$ em $[-\frac{1}{2},\ 1]$

3. $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + x + 1}$ em $[-0,\ 5]$ **4.** $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ em $[-1,\ \frac{1}{2}]$

7. Determine o raio da base e a altura h de um cilindro reto com volume constante V, de modo que sua área total seja mínima.

8. Determine extremos relativos para cada uma das seguintes funções:

1. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se, } \ x \ \text{ é irracional} \\ \dfrac{1}{q} & \text{se, } \ x = \dfrac{p}{q} \ \text{ é fração irredutível, } \ p,\ q \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se, } \ x = \dfrac{1}{n} \ \text{ para algum } \ n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{nos demais casos} \end{cases}$

9. Achar os lados do retângulo, de maior área possível, inscrito na elipse: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

10. Sejam os pontos $A(1,\ 4)$ e $B(3,\ 0)$ da elipse $2x^2 + y^2 = 18$. Achar um terceiro ponto C na elipse tal que, a área do triângulo ABC seja a maior possível.

11. Entre os retângulos de perímetro 10, qual deles é aquele que tem maior área?

12. Para os seguintes exercícios, traçar o gráfico da curva correspondente indicando suas assíntotas.

1. $f(x) = \sqrt{1+x^2} + 2x$ **2**. $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2-4}$

3. $f(x) = \dfrac{x-5}{x^2-7x+10}$ **4**. $f(x) = \sqrt[6]{\dfrac{7x^2-x^3+x-7}{x^3-9x^2-9x+81}}$

5. $f(x) = \dfrac{x^2+9}{(x-3)^2}$ **6**. $f(x) = \sqrt[3]{x^3-5x^2-25x+125}$

7. $f(x) = \sqrt{x+x^2} - x$ **8**. $f(x) = \sqrt[4]{x^4-x^3-9x^2+9x}$

9. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^2+2x-24}}$ **10**. $f(x) = \sqrt{4+x^2} + \dfrac{3x^3+3x+1}{x^2+x-6}$

11 $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x}$ **12**. $f(x) = \sqrt{36x^4+5} + \dfrac{5+4x^4-6x^5}{x^3-6x^2-4x+24}$

13. $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{21+4x-x^2}{x^2+7x-8}}$ **14**. $f(x) = \dfrac{x^5-5x^4+1}{x^4-11x^2-80} - \sqrt[3]{x^3+1}$

15. $f(x) = \sqrt{\dfrac{9x^2-6x-8}{16x^2+4x-6}}$ **16**. $f(x) = \sqrt{4+x^2} + \dfrac{x^2-x^3+1}{x^2+1}$

17. $f(x) = \sqrt{\dfrac{16x^2+4x-6}{9x^2-6x-8}}$ **18**. $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x^6-9x^4-x^2+9}{x^2-25}} + x$

19. $y^3 - 6x^2 + x^3 = 0$ **20**. $f(x) = x - \sqrt[4]{\dfrac{x^6-9x^4-x^2+9}{x^2-25}}$

21. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{se,} \quad |x| < 1 \\ \dfrac{3x}{2x+1} + 3x, & \text{se,} \quad |x| \geq 1 \end{cases}$

22. $f(x) = \begin{cases} x + \left[\left|\dfrac{5x-17}{x+3}\right|\right], & \text{se,} \quad x \leq -3 \\ \dfrac{|10x-1| + 50x^2 - 19}{(x-2)(x^2+4x+3)}, & \text{se,} \quad -3 < x < 1 \\ \sqrt[4]{8x - 8x^6} - 5x^2, & \text{se,} \quad x \geq 1 \end{cases}$

23. $f(x) = \begin{cases} \left[\left|2 + \dfrac{2}{x}\right|\right], & \text{se,} \quad x \leq -3 \\ \sqrt[3]{\dfrac{2x+2}{x-1}}, & \text{se,} \quad -3 < x < 1 \\ \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}, & \text{se,} \quad x \geq 1 \end{cases}$

24. $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}, & \text{se,} \quad |x| < 2 \\ \dfrac{2x^2}{x^2+x}, & \text{se,} \quad |x| \geq 2 \end{cases}$

13. Construir o gráfico das seguintes curvas, mostrando suas assíntotas.

1. $y^3 = (x-a)^2(x-c), \quad a > 0, \ c > 0$

2. $y^2(x-2a) = x^3 - a^3$

3. $x^3 - 2y^2 - y^3 = 0$

4. $xy^2 + yx^2 = a^3, \quad a > 0$

5. $4x^3 = (a+3x)(x^2+y^2), \quad a > 0$

6. $x^2(x-y)^2 = a^2(x^2+y^2)$

7. $x^2(x-y)^2 = y^4 - 1$

14. Para cada exercício, determine as constantes m e n que cumprem a condição:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^2 - 3\sqrt[3]{x^2+1} + 3}{x-3} - mx - n\right] = 0$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^2 + 3\sqrt[3]{x^3+1} + 5}{x+3} - mx - n\right] = 0$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{5x^3 - \sqrt[4]{x^8+1} - \sqrt[3]{x^6+1} + 1}{x^2-4} - mx - n\right] = 0$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{5x^3 + \sqrt[4]{x^8+1} + \sqrt[3]{x^6+1} + 5}{x^2+4} - mx - n\right] = 0$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{6x^4 + 4\sqrt[4]{x^{12}+1} - x^3 - \sqrt[3]{x^9+1} + 7}{x^3-8} - 3mx - 2n\right] = 0$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{6x^4 + 5\sqrt[4]{x^{12}+1} - 7x^3 - \sqrt[3]{x^9+1} - 9}{x^3-8} - 2mx - 3n\right] = 0$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{20x^3+15x^2+6}{3x^2+4}-\sqrt{4x^2+5x}+\sqrt[3]{\dfrac{8x^5+3x+1}{x^2+1}}+4mx+17n\right]=0$

15. Para cada um dos seguintes exercícios, calcular assíntotas, pontos de máximo ou mínimos e desenhar a região A:

1. $A=\{\,(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ /.\ \ y=\cos x,\quad x=-\frac{\pi}{2},\ x=\frac{\pi}{2},\ y=0\,\}$

2. $A=\{\,(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ /.\ \ y=x^2+2x-3,\quad x=-2,\ x=0,\ y=0\,\}$

3. $A=\{\,(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ /.\ \ y=9-x^2,\ y=x^2+1\,\}$

4. $A=\{\,(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ /.\ \ y=\dfrac{x^2-x}{1+x^2},\quad y=0,\ x=-1,\ x=2\,\}$

5. $A=\{\,(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ /.\ \ y=3x-x^2,\quad y=x^2-x\,\}$

6. $A=\{\,(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ /.\ \ y=\tan x,\quad x=0,\ y=\frac{2}{3}\cos x\,\}$

7. $A=\{\,(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ /.\ \ y=x^3+x,\quad x=0,\ y=2,\ y=0\,\}$

8. $A=\{\,(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ /.\ \ y=\arctan x,\quad y=\arccos\frac{3x}{2},\ y=0\,\}$

9. $A=\{\,(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ /.\ \ y=\text{arcsen}x,\quad y=\arccos x,\ x=1\,\}$

10. $A=\{\,(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ /.\ \ y=x^3-3x^2+2x+2,\quad y=2x^2-4x+2\,\}$

11. $A=\{\,(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ /.\ \ y=4-\text{Ln}(x+1),\quad y=\text{Ln}(x+1),\ x=0\,\}$

12. $A=\{\,(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ /.\ \ y^2-x=0,\quad y-x^3=0,\ x+y-2=0\,\}$

13. $A=\{\,(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ /.\ \ y(x^2+4)=4(2-x),\ y=0,\ x=0\,\}$

14. $A=\{\,(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ /.\ \ y=x^3+x-4,\quad y=x,\ y=8-x\,\}$

15. $A=\{\,(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ /.\ \ y=e^x,\quad y=e^{-x},\ x=1\,\}$

16. $A=\{\,(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ /.\ \ y=2x+2,\quad x=y^2+1,\ x=0,\ y=0,\ x=2\,\}$

17. $A=\{\,(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ /.\ \ y=\mid x-2\mid,\quad y+x^2=0,\ x=1,\ x=3\,\}$

18. $A=\{\,(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ /.\ \ y=\sqrt{x^2-3},\ y=\mid x-1\mid,\ y=0\,\}$

19. $A=\{\,(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ /.\ \ y=\mid \text{sen}x\mid\quad \text{para}\quad x\in[0,\ 2\pi],\quad y=-x,\ x=2\pi\,\}$

20. $A=\{\,(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ /.\ \ y=\dfrac{x^2-4}{x^2-16},\quad x=-3,\ x=3,\ y=0\,\}$

21. $A=\{\,(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ /.\ \ y=\text{arcsen}x,\quad y=\arccos x,\ x=0\,\}$

22. $A=\{\,(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ /.\ \ y=\tan^2 x,\quad y=0,\ x=\frac{\pi}{3},\ x=0\,\}$

16. Calcule as dimensões do retângulo de perímetro máximo que pode ser inscrto em uma semicircunferência de raio r.

17. Acumula-se areia em forma cônica a razão de $10dm^3/min$. Se a altura do cone é sempre igual a dois vezes o raio de sua base, a que razão cresce a altura do cone quando esta é igual a $8dm$?

6.3 Formas indeterminadas

Trataremos das regras de L'Hospital que permitem calcular limites da forma:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\cdot\infty, \quad \infty-\infty, \quad 0^0, \quad \infty^\infty, \quad 1^\infty$$

Teorema 6.1. *de Cauchy.*

Sejam as funções reais $f(x)$ *e* $g(x)$*, tais que:*

a) *Sejam contínuas no intervalo* $[a,\ b]$.

b) *Sejam deriváveis em* $(a,\ b)$.

c) $g'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in (a,\ b)$

então, existe pelo menos um ponto $c \in (a,\ b)$ *tal que:* $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Demonstração.

Observe, $g(a) \neq g(b)$ para o caso $g(a) = g(b)$ cumpriria as condições do Teorema de Rolle ; isto implicaria que existe $c \in (a,\ b)$ tal que $g'(c) = 0$ contrário à hipótese.

Seja $k = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, então

$$f(b) - f(a) = k(g(b) - g(a)) \tag{6.3}$$

Considere-se a função auxiliar $F(x) = f(x) - f(a) - k(g(x) - g(a))$ para todo $x \in [a,\ b]$; então F é contínua em $[a,\ b]$, F é derivável em $(a,\ b)$ e $F(b) = F(a) = 0$; logo F cumprem as condições do Teorema de Rolle, portanto existe $c \in (a,\ b)$ tal que $F'(c) = 0$.

Sendo $F'(x) = f'(x) - kg'(x)$, então $F'(c) = f'(c) - kg'(c) = 0$ e como $g'(c) \neq 0 \quad \forall c \in (a,\ b), \quad k = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Portanto, em (6.3)temos $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Propriedade 6.8. *Primeira regra de L'Hospital.*

Se as funções $f,\ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cumprem:

a) Contínuas no intervalo $[a,\ a+h], \quad h > 0$

b) deriváveis em $(a,\ a+h)$

c) $g'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in (a,\ a+h)$

d) $f(a) = g(a) = 0$

e) $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ou $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$

então $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ou $\pm\infty$.

Demonstração.

Observe que $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,\, a+h)$. Aplicando o **T.V.M.** à função g no intervalo $[a,\, a+h]$ temos que existe onde $c \in (a,\, x)$ tal que $g(x) - g(a) = (x-a)g'(c)$; as hipóteses **c)** e **d)** implicam $g(x) = (x-a)g'(c) \neq 0$.

Para $x \in (a,\, a+h)$ considere o quociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ e como por hipótese $f(a) = g(a) = 0$, o teorema de Cauchy permite escrever $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ para $a < d < x$.

Observando, quando $x \to a^+$, então $d \to a^+$, da hipótese **e)** segue:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{d\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \text{ou} \quad \pm\infty$$

Observação 6.7.

Se as condições da Propriedade (6.8) são verificadas num intervalo $[a-h,\, a]$ ou $[a-h,\, a+h]$, a Propriedade (6.8) é verdadeira quando $x \to a^-$ ou $x \to a$

Propriedade 6.9.

Se as condições **a)**, **b)** *e* **c)** *da Propriedade (6.8) são verificadas num intervalo $[\frac{1}{h}, +\infty)$ ou $(-\infty, -\frac{1}{h}]$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} .f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} .g(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} .f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} .g(x) = 0$, então*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sempre que o limite do segundo membro exista.

Demonstração.

Se $x \to +\infty$, considerando $x = \dfrac{1}{t}$ as duas funções $f(\dfrac{1}{t})$ e $g(\dfrac{1}{t})$ têm limite zero quando $t \to 0^+$.

Definindo $f(\dfrac{1}{t}) = g(\dfrac{1}{t}) = 0$ para $t = 0$, obtêm-se duas funções contínuas no intervalo $[0,\, h]$ que verificam as condições da *Propriedade* (6.8).

Aplicando esta *Propriedade* (6.8):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0^+} \frac{[f(\frac{1}{t})]'}{[g(\frac{1}{t})]'} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-\frac{1}{t^2}\cdot f'(\frac{1}{t})}{-\frac{1}{t^2}\cdot g'(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

De modo similar mostra-se quando $t \to -\infty$.

Propriedade 6.10.

Se $f'(a) = g'(a) = 0$ e f' e g' cumprem as condições da Propriedade (6.8), então:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

Demonstração.

A demonstração é exercício para o leitor.

Observação 6.8.

Se não existe o limite de $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *quando* $x \to a$*, então não podemos concluir que não existe o limite de* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *como mostra o seguinte exemplo.*

Exemplo 6.31.

Sejam as funções $g(x) = \text{sen}x$ e $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \text{sen}(\dfrac{1}{x}) & \text{se}, \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se}, \quad x = 0 \end{cases}$.

Calculando o limite: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \cdot \text{sen}(\frac{1}{x})}{\text{sen}x} = \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{x}{\text{sen}x} \cdot x \cdot \text{sen}\dfrac{1}{x} \right] = 0.$

Por outro lado, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\text{sen}(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})}{\cos x}$ não existe.

Propriedade 6.11. *Segunda regra de L'Hospital.*

Se as funções $f,\ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cumprem:

a) Contínuas no intervalo $(a,\ a+h]$, $\quad h > 0$

b) deriváveis em $(a,\ a+h)$

c) $g'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in (a,\ a+h)$

d) $\lim\limits_{x\to a^+} .f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} .g(x) = \infty$

e) $f(a) = g(a) = 0$

f) $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \text{ou} \quad \pm\infty$

então $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \text{ou} \quad \pm\infty$

Demonstração.

Exercício para o leitor.

Exemplo 6.32.

Calcular os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^{-\frac{1}{4}}}{\text{Ln}x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \text{sen}(\frac{1}{x})}$

Solução. **a)**

É da forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, logo $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^{-\frac{1}{4}}}{\text{Ln}x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}}{x^{-1}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left[-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}} \right] = -\infty.$

Solução. b)

É da forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, logo $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \text{sen}(\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x^{-2}}{x^{-2}(1 + \cos(\frac{1}{x}))} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1 + \cos(\frac{1}{x})}$ este último limite não existe, porém $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \text{sen}(\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1 + x\text{sen}(\frac{1}{x})} = 1.$

Observação 6.9.

i) Aplicando o **T.V.M.** mostra-se que, se $\lim\limits_{x\to a}.f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to a}.g(x) = \infty$, então $\lim\limits_{x\to a}.f'(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to a}.g'(x) = \infty$, isto significa que num certo subconjunto de $D(f)$ é indeterminado $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ quando $x \to a$. Não obstante o quociente $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ pode permitir simplificações que $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ não permite (*Exemplo* (6.32) *a)*)

ii) Para a forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ verificam-se as propriedades análogas aos da forma $\dfrac{0}{0}$.

iii) Na forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ é necessário considerar que, se $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ não tem limite quando $x \to a$, não podemos concluir que $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ não tenha limite (*Exemplo* (6.32) *b)*)

Exemplo 6.33.

Calcular $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{e^{x-3} - e^{3-x}}{\text{sen}(x-3)}$

Solução.

Quando $x \to 3$, o limite tende para $\dfrac{0}{0}$, como as condições da regra de L'Hospital (*Propriedade* (6.11)) cumprem, então: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{e^{x-3} - e^{3-x}}{\text{sen}(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{e^{x-3} + e^{3-x}}{\cos(x-3)} = \dfrac{1+1}{1} = 2$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{e^{x-3} - e^{3-x}}{\text{sen}(x-3)} = 2$.

Exemplo 6.34.

Calcular $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^{x-2} + e^{2-x} - 2}{1 - \cos(x-2)}$.

Solução.

O limite é da forma $\dfrac{0}{0}$, aplicando a regra de L'Hospital temos: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^{x-2} + e^{2-x} - 2}{1 - \cos(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^{x-2} - e^{2-x}}{\text{sen}(x-2)}$.

Este último limite é da forma $\dfrac{0}{0}$, aplicando novamente a *Propriedade* (6.8) temos: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^{x-2} + e^{2-x}}{\cos(x-2)} = 2$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^{x-2} + e^{2-x} - 2}{1 - \cos(x-2)} = 2$.

Exemplo 6.35.

Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x - \frac{1}{2}x^2}{x^4}$.

Solução.

Este limite é da forma $\dfrac{0}{0}$, aplicando três vezes a regra de L'Hospital temos:
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x-\frac{1}{2}x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}x-x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{12x^2}=-\dfrac{1}{24}$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x-\frac{1}{2}x^2}{x^4}=-\dfrac{1}{24}$

Exemplo 6.36.

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

Solução.

Se $x\to 0^+$, este limite é da forma $\dfrac{0}{0}$, então $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{-2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}}{1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$ observe, se continuamos com o processo não poderemos evitar a indeterminação.

Por outro lado escrevendo, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}$ este último limite é da forma $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Aplicando a regra de L'Hospital, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x^{-2}}{-x^{-2}e^{\frac{1}{x}}}=0$.

Se $x\to 0^-$,temos $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}=(-\infty)(+\infty)=-\infty$.

Portanto o limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ não existe.

Exemplo 6.37.

Calcular $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x^2}}$.

Solução.

É da forma $\dfrac{0}{0}$, então $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot 2x^{-3}}{-2x^{-3}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{-1}=-1$.

Portanto $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x^2}}=-1$.

Exemplo 6.38.

Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\text{Ln}(\text{sen}x)}{\text{Ln}(\tan x)}$.

Solução.

O limite é da forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, logo $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\text{Ln}(\text{sen}x)}{\text{Ln}(\tan x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cot x}{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\cos^2 x$.

Portanto $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\text{Ln}(\text{sen}x)}{\text{Ln}(\tan x)}=1$.

Exemplo 6.39.

Calcular $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan(3x)}$.

Solução.

O limite é da forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, das identidades trigonométricas segue-se :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan(3x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\text{sen}x\cdot\cos 3x}{\text{sen}3x\cdot\cos x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\text{sen}x}{\text{sen}3x}\right]\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos 3x}{\cos x}\right] = (-1)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos 3x}{\cos x}\right].$$

A aplicando a regra de L'Hospital a o último limite:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos 3x}{\cos x}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{-3\text{sen}3x}{-\text{sen}x}\right] = -3.$$

Portanto $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan(3x)} = (-1)(-3) = 3.$

Exemplo 6.40.

Calcular $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x},\quad n\in\mathbb{N}.$

Solução.

Como $n\in\mathbb{N}$ e o limite é da forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, aplicando a regra de L'Hospital sucessivamente n vezes,temos : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x} = 0.$

Portanto, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0.$

Exemplo 6.41.

Determine o seguinte limite : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^r}{e^x},\quad r\in\mathbb{Q}-\mathbb{N},\quad r>0.$

Solução.

O limite é da forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, como r é um número real positivo, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $n-1<r<n$. Aplicando a regra de L'Hospital sucessivamente n vezes temos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^r}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)\cdots(r-(n-1))x^{r-n}}{e^x} = 0$$

pois, $(r-n)<0$. Este resultado mostra que, quando $x\to+\infty$ o limite da exponencial e^x é infinito de "*ordem maior que qualquer potência de x*".

Portanto, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^r}{e^x} = 0.$

Exemplo 6.42.

Calcular $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{Ln}x}{x^r},\quad r\in\mathbb{N},\quad r>0.$

Solução.

O limite é da forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, aplicando a regra de L'Hospital temos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{Ln}x}{x^r} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-1}}{r\cdot x^{r-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{r\cdot x^r} = 0.$$

O resultado mostra que, quando $x \to +\infty$ a função Lnx é infinito de *"ordem inferior de* x^r*"*, para $r > 0$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{Ln}x}{x^r} = 0$.

6.3.1 Formas indeterminadas redutíveis à forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$

As regras de L'Hospital aplicam-se à forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$; porém as formas indeterminadas: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0 e 1^∞; podem ser transformadas para forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

6.3.1.1 A forma indeterminada $0 \cdot \infty$

Quando por exemplo $\lim\limits_{x\to a}.f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a}.g(x) = \infty$ (pode ser $\pm\infty$), temos: $[\lim\limits_{x\to a}.f(x)]\cdot[\lim\limits_{x\to a}.g(x)] = \lim\limits_{x\to a}.f(x)g(x) = 0\cdot\infty$. Este limite pode ser calculado utilizando a regra de L'Hospital, segundo uma das seguintes transformações:

1^a $\quad f \cdot g = \dfrac{f}{\frac{1}{g}}$ e resulta da forma $\dfrac{0}{0}$.

2^a $\quad f \cdot g = \dfrac{g}{\frac{1}{f}}$ e resulta da forma $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Observação 6.10.

i)) Quando um dos fatores é uma função transcendente com derivadas algébricas, convém considerar este fator como o numerador antes de utilizar a regra de L'Hospital.

ii) Não confundir com a *Propriedade* (6.11)-*(d)* o valor de um dos limites não é um número real.

Exemplo 6.43.

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}[\tan x \cdot \text{Ln}(\text{sen}x)]$

Solução.

Observe que o limite é da forma $0 \cdot \infty$, aplicando a regra precedente e da *Observação* (6.10)temos: $\lim\limits_{x\to 0}[\tan x \cdot \text{Ln}(\text{sen}x)] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{Ln}(\text{sen}x)}{\cot x}$ é da forma $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Logo, $\lim\limits_{x\to 0}[\tan x \cdot \text{Ln}(\text{sen}x)] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{Ln}(\text{sen}x)}{\cot x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cot x}{-\csc^2 x} = -\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)(\text{sen}x) = 0$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0}[\tan x \cdot \text{Ln}(\text{sen}x)] = 0$.

6.3.1.2 A forma indeterminada $\infty - \infty$

Por exemplo, se $\lim\limits_{x\to a} .f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to a} .g(x) = \infty$,temos: $\lim\limits_{x\to a} .f(x) - \lim\limits_{x\to a} .g(x) = \infty - \infty$.

Este limite pode ser calculado utilizando a regra de L'Hospital, segundo a transformação: $\quad f - g = f \cdot g[\dfrac{1}{g} - \dfrac{1}{f}]$.

Exemplo 6.44.

Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+}[\dfrac{1}{x} - \csc x]$.

Solução.

Temos $\lim\limits_{x\to 0^+}[\dfrac{1}{x} - \csc x] = \lim\limits_{x\to 0^+}[\dfrac{\csc x}{x}][\dfrac{1}{\csc x} - \dfrac{1}{\frac{1}{x}}] = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-(x - \text{sen}x)}{x \cdot \text{sen}x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x - 1}{\text{sen}x + x \cdot \cos x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-\text{sen}x}{\cos x + \cos x - x \cdot \text{sen}x} = \dfrac{0}{2} = 0$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0^+}[\dfrac{1}{x} - \csc x] = 0$.

6.3.1.3 As formas indeterminadas 0^0, ∞^0 e 1^∞

Todas estas formas são redutíveis à forma $0 \cdot \infty$, se ao calcular o limite utilizamos a propriedade de logaritmo que diz: $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \text{Ln}[f(x)]}$.

Exemplo 6.45.

Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+}[x + \text{sen}x]^{\tan x}$.

Solução.

Observe:

$$\lim_{x\to 0^+}[x + \text{sen}x]^{\tan x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \tan x \cdot \text{Ln}(x + \text{sen}x)} \tag{6.4}$$

Por outro lado, $\lim\limits_{x\to 0^+} \tan x \cdot \text{Ln}(x + \text{sen}x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\text{Ln}(x + \text{sen}x)}{\cot x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1 + \cos x}{x + \text{sen}x}}{-\csc^2 x} =$

$$\lim_{x\to 0^+}(1 + \cos x) \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}^2 x}{x + \text{sen}x} = (-2)\lim_{x\to 0^+} \frac{2\text{sen}x \cos x}{1 + \cos x} = (-2)(0) = 0$$

Na expressão (6.4) temos $\lim\limits_{x\to 0^+}[x + \text{sen}x]^{\tan x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \tan x \cdot \text{Ln}(x + \text{sen}x)} = e^0 = 1$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0^+}[x + \text{sen}x]^{\tan x} = 1$.

Exemplo 6.46.

Calcular $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}[\tan x]^{\frac{\pi}{2} - x}$.

Solução.

Temos:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}[\tan x]^{\frac{\pi}{2} - x} = e^{\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x)\text{Ln}[\tan x]} \tag{6.5}$$

Por outro lado, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\dfrac{\pi}{2}-x)\text{Ln}[\tan x] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{Ln}(\tan x)}{\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)}} =$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\frac{\pi}{2}-x)^2}{\text{sen}x\cdot\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-2(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos^2 x - \text{sen}^2 x} = \frac{0}{-1} = 0$$

Em (6.5) segue-se, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[\tan x]^{\frac{\pi}{2}-x} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)\text{Ln}(\tan x)} = e^0 = 1.$

Portanto, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[\tan x]^{\frac{\pi}{2}-x} = 1.$

Exemplo 6.47.

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}[1+x^2]^{\frac{1}{x\cdot\text{sen}x}}$.

Solução.

Este limite é da forma 1^∞, e temos: $\lim\limits_{x\to 0}[1+x^2]^{\frac{1}{x\cdot\text{sen}x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{Ln}(1+x^2)}{x\cdot\text{sen}x}}$.

Para o cálculo do limite do expoente de **e** segue-se:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{Ln}(1+x^2)}{x\cdot\text{sen}x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\text{sen}x + x\cdot\cos x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\text{sen}x + x\cdot\cos x} = (1)\lim_{x\to 0}\frac{2}{2\cos x - \text{sen}x} = 1$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0}[1+x^2]^{\frac{1}{x\cdot\text{sen}x}} = e^1 = e.$

Exemplo 6.48.

Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

Solução.

O limite podemos escrever na forma:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\text{Ln}x} \tag{6.6}$$

Temos: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\text{Ln}x = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\text{Ln}x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0.$

Portanto, em (6.6) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1.$

Exemplo 6.49.

Mostre que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\text{sen}x}{x+\text{sen}x}$ *existe, porém não é necessário aplicar a regra de L'Hospital.*

Solução.

Quando $x\to\infty$, temos $y = \dfrac{1}{x} \to 0$, logo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\text{sen}x}{x+\text{sen}x} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{y}-\text{sen}\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}+\text{sen}\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0}\frac{1-y\text{sen}\frac{1}{y}}{1+y\text{sen}\frac{1}{y}}$$

Como cumpre-se a desigualdade $\mid \text{sen}\dfrac{1}{y} \mid \leq 1$ (é limitada), então $\lim\limits_{y\to 0} y \cdot \text{sen}\frac{1}{y} = 0$, consequentemente $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{1 - y\text{sen}\frac{1}{y}}{1 + y\text{sen}\frac{1}{y}} = 1$. Portanto $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x - \text{sen}x}{x + \text{sen}x} = 1$.

Não podemos aplicar a regra de L'Hospital observe, é da forma

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x - \text{sen}x}{x + \text{sen}x} = \frac{\nexists}{\nexists}$$

Exemplo 6.50.

a) Dar um exemplo de uma função $f(x)$ para o qual existe $\lim\limits_{x\to\infty} .f(x)$, porém não existe $\lim\limits_{x\to\infty} .f'(x)$

b) Mostre que, se existem $\lim\limits_{x\to\infty} .f(x)$ e $\lim\limits_{x\to\infty} .f'(x)$, então $\lim\limits_{x\to\infty} .f'(x) = 0$.

c) Mostre que se existe $\lim\limits_{x\to\infty} .f(x)$ e existe $\lim\limits_{x\to\infty} .f''(x)$ e também $\lim\limits_{x\to\infty} .f''(x) = 0$.

Solução. **a)**

É suficiente considerar a função $f(x) = \dfrac{\text{sen}x^2}{x}$. Observe, $\lim\limits_{x\to\infty} .f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\text{sen}x^2}{x} = 0$ porém; $\quad f'(x) = \dfrac{2x^2 \cos x^2 - \text{sen}x^2}{x^2} = 2\cos x^2 - \dfrac{\text{sen}x^2}{x^2}$.

No limite $\lim\limits_{x\to\infty} .f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left[2\cos x^2 - \dfrac{\text{sen}x^2}{x^2}\right] = \nexists - 1 = ?$

Solução. b)

Suponhamos que $\lim\limits_{x\to\infty} .f'(x) = L > 0$. Então existe algum N tal que $\mid f'(x) - L \mid < \dfrac{L}{2}$ para $x > N$, isto implica que $f'(x) > \dfrac{L}{2}$.

Porém segundo o teorema do valor médio isto também implica que

$$f(x) > f(N) + \frac{x - N \mid L \mid}{2} \qquad \text{para} \quad x > N$$

o que significa que $\lim\limits_{x\to\infty} .f(x)$ não existe. De modo análogo mostra-se que não pode acontecer $\lim\limits_{x\to\infty} .f'(x) = L < 0$.

Portanto $\lim\limits_{x\to\infty} .f'(x) = 0$

Solução. **c)**

Seja $\lim\limits_{x\to\infty} .f''(x) = L > 0$, então o mesmo que na parte **a)** teríamos que $\lim\limits_{x\ to\infty} .f'(x) = \infty$. Aplicando novamente o teorema do valor médio mostra-se que $\lim\limits_{x\to\infty} .f(x) = \infty$, isto é contradição com a hipótese. De modo análogo não pode acontecer $\lim\limits_{x\to\infty} .f''(x) = L < 0$. Portanto $\lim\limits_{x\to\infty} .f''(x) = 0$.

Em geral, se existem $\lim\limits_{x\to\infty} .f(x)$ e $\lim\limits_{x\to\infty} .f^{(k)}(x)$, então $\lim\limits_{x\to\infty} .f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} .f''(x) = \lim\limits_{x\to\infty} .f'''(x) = \cdots = \lim\limits_{x\to\infty} .f^{(k)}(x) = 0 \qquad k \in \mathbb{N}$.

Exercícios 6-3

1. Calcular os seguintes limites:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\text{Ln}(x+1)}$	**2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x-\text{sen}x}$	**3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\text{sen}(\pi x)}{x-\text{sen}(\pi x)}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x(x+1)}$	**5.** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{e^x+x}$	**6.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-(a+1)^x}{x}$
7. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\left[\dfrac{\tan x}{x}\right]}$	**8.** $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{\text{Ln}x}-\dfrac{x}{x-1}\right]$	**9.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\text{arcsen}x}{x}$
10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a^{\text{Ln}x}-x}{\text{Ln}x}$	**11.** $\lim\limits_{x\to 0^+}[\text{Ln}x+\dfrac{1}{x^2}]$	**12.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-x\cdot\text{Ln}x-\cos x}{\text{sen}^2x}$
13. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\sec x}$	**14.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot e^{nx}-x}{1-\cos(nx)}$	**15.** $\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{1}{x\cdot\cos x}-\cot x]$
16. $\lim\limits_{x\to 0}\text{sen}^x x$	**17.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}^2x-\text{sen}x^2}{x\cdot\cos x}$	**18.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[\dfrac{\pi}{2\cos x}-x\cdot\tan x]$
19. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\text{Ln}x}{\sqrt{x}}$	**20.** $\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{1}{\text{sen}^2x}-\dfrac{1}{x^2}]$	**21.** $\lim\limits_{x\to 0}\text{Ln}\left[\dfrac{\text{sen}y+\text{sen}x}{\text{sen}y-\text{sen}x}\right]^{\frac{5}{1+2\text{Ln}x}}$
22. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan x}{x}$	**23.** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{1+x}$	**24.** $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-e^x)\text{Ln}(\text{sen}x)$
25. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	**26.** $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot(\text{Ln}\mid x\mid)^2$	**27.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\tan^2(x^{-1})}{\text{Ln}^2(1+4x^{-1})}$
28. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x^2]{x^2+a^2}$	**29.** $\lim\limits_{x\to 1}[\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\text{Ln}x}]$	**30.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\text{sen}(\text{sen}x)}{1-\cos(\text{sen}x)}$
31. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{5}{1+2\text{Ln}x}}$	**32.** $\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}]$	**33.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^2+3x+5}{\text{sen}x}-\dfrac{5}{x}\right]$

2. Verificar a validade das seguintes igualdades:

1. $$\lim_{x\to -1}\frac{[2^{\sqrt[5]{(x+1)^4}}][1-\sqrt[9]{\cos^7(x+1)}]\sqrt[15]{\text{Ln}^{17}(x+2)}}{[5^{\sqrt[5]{x+1}}]\cdot\tan^3(\sqrt[3]{x+1})\cdot\text{arcsen}\sqrt[9]{(x+1)^{14}}}=\frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}5}.$$

2. $$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[15]{(a-x)^{13}}[\cos\sqrt[3]{a-x}-\cos(\text{sen}3\sqrt[3]{a-x})]\text{sen}(2\sqrt[3]{(a-x)^2})}{[e^{a-x}-1]\cdot\text{sen}3\sqrt[3]{(a-x)^2}[1-\cos(\text{sen}4\sqrt[3]{(a-x)^2})]}=\frac{1}{6}$$

3. Onde se encontra o erro na aplicação da regra de L'Hospital?

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+1}{2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{6}{2}=3$$

Na verdade o limite é -4.

4. Determine os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x - 1}{x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{\tan x}$

5. Determine $f'(0)$ se: $f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$, $g(0) = g'(0) = 0$ e $g''(0) = 17$.

6. Mostre as seguintes regras de L'Hospital:

1. Se $\lim\limits_{x\to a^+} .f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} .g(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$, (análogo para limites á esquerda).

2. Se $\lim\limits_{x\to a^+} .f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} .g(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 0$, então $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, (análogo para $-\infty$ ou se $x \to a^+$ ou $x \to a^-$)

3. Se $\lim\limits_{x\to\infty} .f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} .g(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então $\lim\limits_{x\ to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

4. Se $\lim\limits_{x\to\infty} .f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} .g(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, então $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

7. Mostre que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \cdot \text{sen}\frac{1}{x}}{\text{sen}x} = 0$, porém não podemos calcular aplicando a regra de L'Hospital.

8. Determine os limites das seguintes funções:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \text{sen}^x x$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot \text{Ln}x$ **3.** $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right]$

4. $\lim\limits_{x\to 0} (x+1)^{\text{Ln}x}$ **5.** $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{\text{Ln}(x-1)}{\cot \pi x}\right]$ **6.** $\lim\limits_{x\to a} \left[\frac{\text{Ln}(x-a)}{\text{Ln}(e^x - e^a)}\right]$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x + 2^x}$ **8.** $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\text{Ln}x}\right]$ **9.** $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{p}{1-x^p} - \dfrac{q}{1-x^q}\right]$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x^2]{\frac{\tan x}{x}}$ **11.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}$ **12.** $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{\pi - 2\arctan x}{\sqrt[x]{e^3} - 1}\right]$

9. Verificar o cálculo dos seguintes limites:

1. $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \cot \pi x = \dfrac{1}{\pi}$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{1}{x^2} - \cot^2 x\right] = \dfrac{2}{3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x^2]{\cos^3 2x} = e^{-6}$ **4.** $\lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{2-(e^x + e^{-x})\cos x}{x^4}\right] = \frac{1}{3}$

10. Qual dos triângulos retângulos de perímetro dado $2p$, tem maior área ?

11. De uma folha circular, temos que cortar um setor circular de modo que possamos construir um funil de maior capacidade possível. Determine o ângulo central α do setor circular.

12. Obter um triângulo isósceles de área máxima inscrito num círculo de raio $12cm$.

6.4 Aplicações diversas

Apresenta-se a seguir problemas aplicados a diversos ramos das ciências, tais como problemas de física, química, biologia, etc.

Exemplo 6.51.

Determine dois números inteiros positivos de modo que sua soma seja 60 *e seu produto o maior possível.*
Solução.

Sejam os números x e $60-x$, então o produto $P(x) = x(60-x)$, logo $P'(x) = 60-2x$ quando $P'(x) = 0$ segue que $x = 30$ (é ponto crítico de $P(x)$); também $P''(x) = -2$ e $P''(30) = -2 < 0$. Pelo critério da derivada segunda de $P(x)$, em $x = 30$ temos máximo para $P(x)$.

Logo os números são 30 e 30.

Exemplo 6.52.

Dada uma folha de papelão quadrada de lado **a**, *deseja-se construir uma caixa de base quadrada sem tampa cortando em suas esquinas quadrados iguais e dobrando convenientemente a parte restante. Determinar o lados dos quadrados que devem ser cortados de modo que o volume da caixa seja máximo possível.*
Solução.

Sendo x o lado do quadrado a ser cortado em cada esquina, o volume da caixa é $V(x) = x(\mathbf{a}-2x)^2$ onde $0 < x < \dfrac{\mathbf{a}}{2}$. Derivandotemos $V'(x) = \mathbf{a}^2 - 8\mathbf{a}x + 12x^2$, quando $V'(x) = 0$ temos que o único ponto critico que cumpre a condição é $\dfrac{\mathbf{a}}{6}$; por outro lado, $V''(x) = -8\mathbf{a} + 24x$ e $V''(\dfrac{\mathbf{a}}{6}) = -4\mathbf{a} < 0$.

Portanto, o volume será máximo quando os cortes dos quadrados nas esquinas sejam iguais à sexta parte do comprimento do lado **a**.

Exemplo 6.53.

Deseja-se construir um cilindro circular reto com tampa, cuja base seja uma circunferência, de modo a gastar a menor quantidade de material. Qual é a relação entre a altura e o raio da base para isto acontecer ?
Solução.

De um ponto de vista matemático, o problema apresenta dois aspectos.

a) De todos os cilindros que possuem área total igual, terá menor gasto de material aquele que tenha maior volume.

b) De todos os cilindros que possuem o mesmo volume, terá menor gasto de material aquele que sua área seja mínima.

Consideremos o caso da parte **a)**.

Suponha um cilindro de altura h e raio da base r; então sua área total é $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ (A é constante) e seu volume $V = \pi r^2 h$.

Do dado da área total vem, $h = \dfrac{A - 2\pi r^2}{2\pi r}$, substituindo este valor em V temos

$$V(r) = \pi r^2 (\frac{A - 2\pi r^2}{2\pi r}) = \frac{Ar}{2} - \pi r^3 \quad \Rightarrow \quad V'(r) = \frac{A}{2} - 3\pi r^2$$

otimizando esta função encontra-se $r_0 = \sqrt{\dfrac{A}{6\pi}}$ é ponto crítico, e $V''(r_0) = -6\pi r < 0$, assim o volume é máximo.

Considere $r = r_0 = \sqrt{\dfrac{A}{6\pi}} \quad \Rightarrow \quad A = 6\pi r^2$, substituindo na altura h temos

$$h = \frac{A - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{6\pi r^2 - 2\pi r^2}{2\pi r} = 2r$$

Logo a relação $h : r$ é $2 : 1$; isto é, a altura é o dobro do raio da base.

Exemplo 6.54.

Um arame de 80cm de comprimento deve ser cortado em dois pedaços. Com um deles deve-se construir uma circunferência, e com o outro um quadrado. Quais são as dimensões dos arames de modo que a soma das áreas do círculo e quadrado sejam: **a)** *mínima;* **b)** *máxima.*

Solução.

Supunha a raio da circunferência seja r, e o lado do quadrado m; e sejam os comprimentos do arame xcm e $(80 - x)cm$; então $2\pi r = x$ e $4m = 80 - x$. A soma das áreas é: $S = \pi r^2 + m^2 = \pi \left[\dfrac{x}{2\pi}\right]^2 + \left[\dfrac{80 - x}{4}\right]^2$.

Logo, $S'(x) = \dfrac{x}{2\pi} - \dfrac{(80 - x)}{8} = x\left[\dfrac{1}{2\pi} + \dfrac{1}{8}\right] - 10 = x\left[\dfrac{4 + \pi}{8\pi}\right] - 10$; o único ponto crítico acontece quando $x = 10\left[\dfrac{8\pi}{4 + \pi}\right] \approx 35,19$.

A derivada segunda de $S(x)$ é: $S''(x) = \left[\dfrac{1}{2\pi} + \dfrac{1}{8}\right] > 0$.

Como a função $S(x)$ somente tem mínimo relativo em $x \approx 35,19$, a área mínima é $S(35,19) = \pi\left[\dfrac{35,19}{2\pi}\right]^2 + \left[\dfrac{80 - 35,19}{4}\right]^2 = 224,13cm^2$, pelo fato não possuir mais pontos críticos, a área máxima deve ocorrer em um dos pontos do extremo. Quando $x = 80$, $S(80) = \pi\left[\dfrac{80}{2\pi}\right]^2 = 509.75cm^2$ tem-se área máxima.

Exemplo 6.55.

Gerador é um aparelho que transforma qualquer tipo de energia em energia elétrica. Se a potência P*, em watts, que um certo gerador lança num circuito elétrico, é dado por:* $P(i) = 20.i - 51i^2$*, onde* i *é a intensidade da corrente elétrica que atravessa o gerador, em amperes (amp), pede-se:* **a)** *Para que intensidade da corrente elétrica este gerador lança no circuito potência máxima?* **b)** *Para que intensidade da corrente elétrica, este gerador lança no circuito uma potência maior que* $15W$*?*

Solução.

A potência é máxima quando existe i, de modo que seja a função $P(i)$ máxima.

De $P(i) = 20.i - 51i^2$ temos que $P'(i) = 20 - 102i$ onde $i = \dfrac{20}{102}$ é o valor crítico; observe que $P''(i) = -102 < 0$, logo em $i = \dfrac{20}{102} = 0.196amp$.

Por outro lado, pede-se o valor de i quando $P(i) = 15$; isto é $15 = 20.i - 51i^2$ logo $51i^2 - 20.i + 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad i = \dfrac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4(51)(15)}}{2(51)}$ sendo o interior da parte radical negativa, não existe i.

Portanto a resposta para a parte **a)** é $i = 0.196amp$ e para a parte **b)** no existe solução.

Exemplo 6.56.

Dois postes verticais de 6 *e* 8 *metros estão plantados num terreno plano, a uma distância de 10m entre suas bases. Calcular aproximadamente o comprimento mínimo de um fio que partindo do topo de um destes postes, toque o solo na reta que une as bases e, logo o topo do outro poste.*

Solução.

Na seguinte *Figura* (6.18), seja $\overline{AC} = 10$, $\overline{AB} = 6$ e $\overline{CD} = 8$, então a hipotenusa $\overline{BM} = \sqrt{36 + x^2}$ e $\overline{MD} = \sqrt{64 + (10 - x)^2}$.

Figura 6.18:

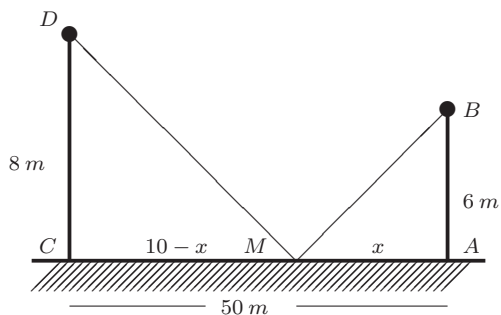
A função comprimento do fio que modela o problema é:

$$f(x) = \sqrt{36 + x^2} + \sqrt{64 + (10 - x)^2}$$

Lembre que $x \geq 0$; logo no cálculo dos pontos críticos de $f(x)$ temos:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{36 + x^2}} - \frac{10 - x}{\sqrt{64 + (10 - x)^2}},$$

quando $f'(x) = 0$, temos $x = \dfrac{30}{7}$ é ponto crítico.

A derivada segunda de $f(x)$ é, $f''(x) = \dfrac{36}{36 + x^2} + \dfrac{64}{64 + (10 - x)^2} > 0$ e $f''(\dfrac{30}{7}) > 0$, logo temos comprimento mínimo quando $x = \dfrac{30}{7}$; assim $f(\dfrac{30}{7}) = \sqrt{36 + \left[\dfrac{30}{7}\right]^2} +$

$\sqrt{64 + \left[10 - \dfrac{30}{7}\right]^2} = 17.20m.$

Exemplo 6.57.

Um automóvel desce um plano inclinado segundo a equação $s(t) = 12t^2 + 6t$. **a)** *Achar a velocidade* 3 *segundos depois da partida;* **b)** *determine a velocidade inicial.*
Solução.

O automóvel que estava em repouso, descreve um movimento em relação ao tempo mediante a equação $s(t) = 12t^2 + 6t$; sua velocidade instantânea em qualquer ponto da trajetória é $v(t) = s'(t) = 24t + 6$.

a) $v(3) = 24(3) + 6 = 78m/sg.$

b) A velocidade inicial quando $t = 0$, foi $v(0) = 6m/sg.$

Exemplo 6.58.

Espera-se que a população de uma certa cidade t *anos após* 1^o *de janeiro de* 1.994 *seja* $f(t) = 10.000 - \dfrac{4.000}{t+1}$. **(a)** *Use a derivada para estimar a mudança esperada na população de* 1^o *de janeiro de* 1998 *a* 1^o *de janeiro de* 1999; **(b)** *Ache a mudança exata esperada na população* 1^o *de janeiro de* 1998 *a* 1^o *de janeiro de* 1999.
Solução. ***a)***

Temos o 1^o de janeiro $t = 0$ e $f(0) = 6.000$ habitantes. Como t é dado em anos, em 1^o de janeiro de 1.998 temos $t = 4$.

Por outro lado, em geral

$$f'(t) \approx \frac{f(t+1) - f(t)}{(t+1) - t} \quad \text{logo} \quad f'(4) \approx \frac{f(4+1) - f(4)}{(4+1) - 4} = f(5) - f(4)$$

assim $f'(4) = (10.000 - \dfrac{4.000}{5}) - (10.000 - \dfrac{4.000}{4}) = 200$ a mudança esperada é de 200 habitantes a mais.
Solução. **b)**

Lembre, $f'(x) = \dfrac{4.000}{(t+1)^2}$, logo a mudança esperada exata é $f'(4) = \dfrac{4.000}{(4+1)^2} = 160$.

Exemplo 6.59.

Uma pedra é lançada para cima verticalmente; suponha atinja sua altura $h(t)$ *em metros depois de* t *segundos do lançamento. Que altura máxima atingirá a pedra? Quantos segundos após ter sido lançada?*
Solução.

É um problema de máximo relativo, por hipótese $h(t) = -5t^2 + 10t$, então $h'(t) = -10t + 10 \quad \Rightarrow \quad t = 1$ é ponto crítico; $h''(t) = -10 < 0$ assim em $t = 1$ temos máximo

relativo (também absoluto) onde $h(1) = -5(1)^2 + 10(1) = 5\,m$ ela atinge o ponto mais alto 1 segundo após de lançada para arriba.

Exemplo 6.60.

Achar os valores de x e y, a fim de que a expressão $x^n y^m$ seja máxima, sendo $x+y=a$, onde a é constante.

Solução.

Temos $y = a - x$, por outro lado da expressão $x^n y^m$ podemos obter a função $f(x) = x^n(a-x)^m$.

Temos $f'(x) = x^n(a-x)^m[na - x(n+m)]$; são pontos críticos $x = a$ e $x = \dfrac{an}{m+n}$.

Quando $x = a$ temos $y = 0$ e $x^n y^m$ não é uma expressão máxima (é constante).

Seja $x_1 > \dfrac{an}{m+n}$, então $f'(x_1) < 0$; e se $x_2 < \dfrac{an}{m+n}$ então $f'(x_2) > 0$; assim $f(x)$ tem máximo quando $x = \dfrac{an}{m+n}$.

Como $x + y = a$ então $x = \dfrac{n(x+y)}{m+n} \quad \Rightarrow \quad x.m = n.y$ logo a expressão $x^n y^m$ será máxima quando é cumpre a relação : $\dfrac{x}{y} : \dfrac{n}{m}$.

Exemplo 6.61.

Duas linhas férreas se cruzam em ângulo reto. Duas locomotivas, de $20\,m$ cada uma, em grande velocidade, aproximam-se do cruzamento, se deslocando em cada uma dessas linhas ferreas. A primeira delas, se encontra em uma estação **A** *a $65\,km$ do cruzamento; a outra, se encontra na estação* **B** *a $40\,km$. A primeira se desloca a uma velocidade de $600\,m/min$, enquanto o outra viaja a $800\,m/min$. Quantos minutos terão transcorridos desde a partida até o instante em que a distância entre as duas locomotivas seja mínima? Qual é essa distância?*

Solução.

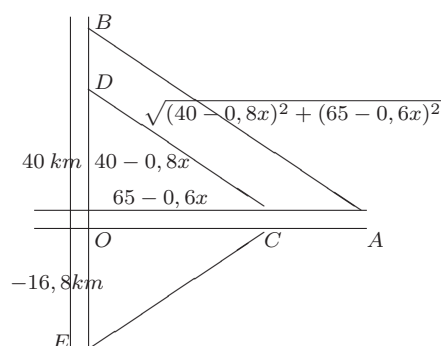
Suponhamos terão transcorrido $x\,min$ até chegar ao cruzamento. A a velocidade da primeira é $600m/min = 0,6km/min$ e, da segunda $0,8km/min$.

Figura 6.19:

Segundo o gráfico da *Figura* (6.19) Temos $\overline{AO} = 65km$ e $\overline{OB} = 40km$; após transcorridos $x\,min$ temos as distâncias:

$$\overline{OC} = (65 - 0.6x),$$

$$\overline{OD} = (40 - 0.8x)$$

Seja $\overline{CD}$ a distância que separa as duas locomotivas, logo: $\overline{CD} = \sqrt{(65-0.6x)^2 + (40-0.8x)^2}$.

A função que descreve a distância $\overline{CD}$ é:

$$f(x) = \sqrt{(65 - 0,6x)^2 + (40 - 0,8x)^2}$$

Calculemos o mínimo relativo da função $f(x)$:

$$f'(x) = -\frac{0,6(65 - 0,6x) + 0,8(40 - 0,8x)}{\sqrt{(65 - 0,6x)^2 + (40 - 0,8x)^2}} = -\frac{71 - x}{\sqrt{(65 - 0,6x)^2 + (40 - 0,8x)^2}}$$

quando $f'(x) = 0$ temos $x = 71$; se $x_1 > 71$, $f'(x_1) > 0$ e se $x_2 < 71$, $f'(x_2) < 0$, logo em $x = 71$ temos mínimo relativo.

Observe que: $40 - 0.8(71) = -16,8 = \overline{OE}$, $\quad 65 - 0,6(71) = 22,4 = \overline{OC}$ e $f(71) = 28$.

Portanto, terão transcorrido 71 minutos e a distância mínima entre elas é de $28km$.

Exemplo 6.62.

Enche-se um balão esférico, de tal modo que seu volume está crescendo à razão de $5\,cm^2/min.$. Em que razão o diâmetro cresce quando o diâmetro é $12\,cm$?
Solução.

O volume de uma esfera de raio r é $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$; sendo seu diâmetro $x = 2r$, temos $V(x) = \dfrac{4\pi x^3}{3(8)}$.

O diferencial do volume em relação ao diâmetro x é, $d(V) = \dfrac{12\pi x^2}{24}dx$; segundo os dados, $d(V) = \dfrac{5\,cm^2}{min.}$ e $x = 12\,cm$, logo

$$\frac{5\,cm^2}{min.} = \frac{12\pi(12\,cm)^2}{24}\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{10\,cm}{144\pi\,min}$$

Por tanto o diâmetro cresce na razão de $\dfrac{10\,cm}{144\pi\,min}$.

Exemplo 6.63.

Num circuito elétrico, se E volts é a força eletromotriz, R ohns é a resistência, I amperes é a corrente, a lei de Ohm estabelece que $I \cdot R = E$. Suponha que E seja constante, mostre que R decresce a uma taxa proporcional ao inverso do quadrado de I.
Solução.

É imediato, pelos dados do problema, temos que, sendo E constante, então $R(I) = \dfrac{E}{I}$; a taxa de variação de R é dada pela expressão $dR = \left[\dfrac{E}{I}\right]' dI$ isto é, $dR = -\dfrac{E}{I^2}dI$.

Portanto, R é decrescente ($dR < 0$); decresce a uma taxa proporcional ao inverso do quadrado da corrente I.

Exemplo 6.64.

Determine as dimensões do cilindro circular reto de volume máximo que pode ser inscrito em uma esfera de raio $R = 12\,m$ *Figura* (6.20)
Solução.

Observe a *Figura* (6.20), sabemos $R = 12 = \dfrac{1}{2}\overline{AB} = \overline{OB} = \overline{AO}$.

Seja r o raio da base do cilindro, então $\overline{AC} = 2r$ e a altura do cilindro é

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2} = 2\sqrt{12^2 - r^2}$$

o volume do cilindro é dado pela função $V(r) = 2\pi r^2\sqrt{12^2 - r^2}$

Temos a derivada $V'(r) = \dfrac{2\pi r(288 - 3r^2)}{\sqrt{12^2 - r^2}}$ quando $V'(r) = 0$ então $r = \pm 4\sqrt{6}$ e $r = 0$ são pontos críticos.

Somente temos volume máximo quando $r = 4\sqrt{6}$ e $BC = 8\sqrt{3}$.

Portanto, o raio da base do cilindro é $r = 4\sqrt{6}$ e sua altura $BC = 8\sqrt{3}$.

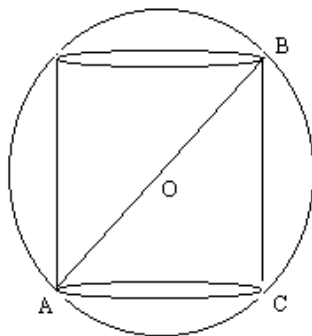



Figura 6.20:

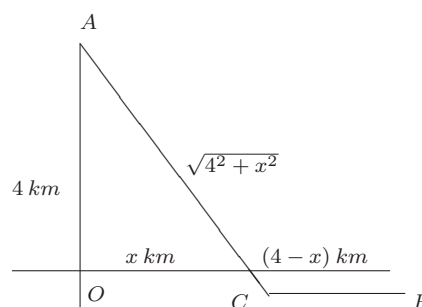



Figura 6.21:

Exemplo 6.65.

Um farol encontra-se num ponto A, a $4\,km$ *do ponto mais perto O de uma costa reta; no ponto B também da costa e a* $4\,km$ *de O existe uma tenda. Se o guarda do farol pode remar a* $4\,km/hora$ *e caminhar* $5\,km/hora$*, qual o caminho que deve seguir para chegar do farol à tenda no menor tempo possível ?*
Solução.

Suponhamos aconteça o desenho da *Figura* (6.21), isto é, deve remar até o ponto C situado entre O e B logo caminhar o resto do caminho.

Seja T o tempo utilizado desde o ponto A até chegar ao ponto B.

Então, como o tempo é a relação do espaço dividido entre velocidade, temos que o

tempo $T = \dfrac{|\ \overline{AC}\ |}{4} + \dfrac{|\ \overline{CB}\ |}{5}$.

Observe, $|\ \overline{AC}\ | = \sqrt{4^2 + x^2}$ e $|\ \overline{CB}\ | = 4 - x$, logo

$$T(x) = \frac{\sqrt{4^2 + x^2}}{4} + \frac{4 - x}{5} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x \leq 4$$

Derivando $T(x)$ obtemos $T'(x) = \dfrac{x}{4\sqrt{16 + x^2}} - \dfrac{1}{5}$, quando $T'(x) = 0$ e considerando o domínio de definição da função, obtemos o ponto crítico $x = \pm\dfrac{16}{3}$ que não pertence ao domínio. A conclusão é que não existe máximo ou mínimo relativo quando $0 \leq x \leq 4$.

Por outro lado, $T(0) = \dfrac{9}{5}$ e $T(4) = \sqrt{2} < \dfrac{9}{5} = T(0)$.

Como $T(4) = \sqrt{2} < \dfrac{9}{5} = T(0)$, é mais rápido remar diretamente até B e não caminhar.

Exemplo 6.66.

As margens superior e inferior de uma página são $3cm$ *cada uma e as margens laterais de* $2,5\ cm$ *cada uma. Se a área do material impresso deve ser fixa e igual a* $623,7\ cm^2$. *Quais são as dimensões da página da área mínima?.*

Solução.

Suponhamos temos a página como na *Figura* (6.22).

A área da mesma é

$$A(x) = (x + 5)\left[\frac{623,7}{x} + 6\right]\ cm^2$$

Para o cálculo de pontos críticos temos

$$A'(x) = 6 - \frac{3.118,6}{x^2} = 0$$

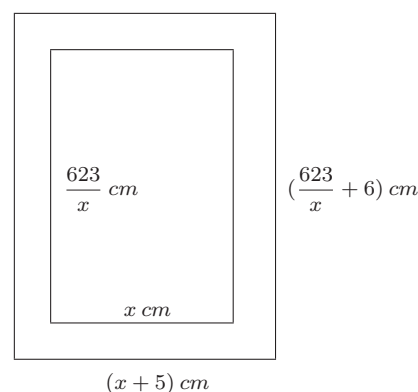
então $x = 22,80$ (aproximadamente). Sendo a derivada segunda positiva, em $x = 22.8$ temos mínimo relativo.

Portanto a página deve ter $27,80cm$ por $33,32cm$.

Figura 6.22:

Exemplo 6.67.

Suponha que uma pessoa posa aprender $f(t)$ *palavras sem sentido em* t *horas e* $f(t) = 25\sqrt[5]{t^2}$, *onde* $0 \leq t \leq 9$. *Ache a taxa de aprendizado da pessoa após:* **(a)** 1 *hora;* **(b)** 8 *horas .*

Solução. **a)**

A taxa de aprendizado depois da primeira hora é $\dfrac{f(1)-f(0)}{9-8} = f(1) = 25$ palavras.
Solução. **b)**

A taxa de aprendizado depois das 8 primeiras horas é $\dfrac{f(9)-f(8)}{9-8} = 25(\sqrt[5]{9^2} - \sqrt[5]{8^2}) =$ $2,77$ palavras após de 8 horas.

A taxa de aprendizado exato é $f'(t) = 25\left[\dfrac{2}{3}\sqrt[5]{t^{-3}}\right]$, quando $t = 8$ temos $f'(8) = 2,87$.

Exemplo 6.68.

Quando tossimos o raio de nossa traquéia diminui, afetando a velocidade do ar que passa nesse órgão. Sendo r_0 *e* r *respectivamente o raio da traquéia na situação normal e no momento da tosse, a relação entre a velocidade* V *e* r *é dada por uma função da forma* $V(r) = ar^2(r_0 - r)$*, onde* a *é uma constante positiva.*

Calcule o raio r *que permite a maior velocidade do ar.*
Solução.

Teremos que calcular o valor de r que maximiza a função $V(r)$; com efeito $V'(r) = 3ar(\dfrac{2}{3}r_0 - r)$ o valor crítico acontece quando $r = \dfrac{2}{3}r_0$.

Seja $r_1 > \dfrac{2}{3}r_0$, então $V'(r_1) < 0$; e se $x_2 < \dfrac{2}{3}r_0$ então $V'(r_2) > 0$; assim $V(r)$ tem máximo quando $x = \dfrac{2}{3}r_0$. O raio r que permite a maior velocidade é $r = \dfrac{2}{3}r_0$.

Exemplo 6.69.

A soma de três números inteiros positivos é 40*, o primeiro mais o triplo do segundo mais o quádruplo do terceiro somam* 80*. Determine os números de modo que seu produto seja o maior possível.*
Solução.

Sejam os números reais a, b, c (nessa ordem) e suponhamos que $a = 40 - (b+c)$, logo

$$[40 - (b+c)] + 3b + 4c = 80 \quad \Rightarrow \quad 2b = 40 - 3c$$

o produto é

$$P = abc = [40 - (\frac{40-3c}{2} + c)](\frac{40-3c}{2})c = \frac{1}{4}(40+c)(40-3c)c$$

Derivando a função P obtemos $P'(c) = -\dfrac{1}{4}(9c^2 + 160c - 1600)$ onde $c = 6,22$ é ponto de máximo relativo. O número procurado próximo de $6,22$ é 6. Portanto os números que cumprem o problema são 23, 11 e 6.

Exemplo 6.70.

Uma bola esférica de neve está se derretendo à razão de $50cm^3$ por minuto. Com qual velocidade está diminuindo o raio da bola quando este mede $15cm$?
Solução.

Como o raio r está em função do tempo, logo $r = r(t)$ e o volume $V(t)$ da bola no instante t minutos está dado por $V(t) = \dfrac{4}{3}\pi[r(t)]^3$ centímetros cúbicos.

A rapidez com que a bola se derrete é dado por $V'(t) = -50cm^3$, também $V'(t) = 4\pi[r(t)]^2 \cdot r'(t)$ assim

$$-50 = 4\pi[r(t)]^2 \cdot r'(t) \quad \Rightarrow \quad r'(t) = -\frac{50}{4\pi[r(t)]^2}$$

Quando $r(t) = 15cm$ segue

$$r'(t) = -\frac{50}{4\pi[15]^2} = -\frac{1}{18\pi}cm/min$$

a derivada é negativa, era de esperar pelo fato o raio estar diminuindo.

Portanto, quando o raio mede $15cm$ esta diminuido à razão de $\dfrac{1}{18\pi}cm/min.$

Exemplo 6.71.

Queremos fabricar uma boia formada por dois cones retos de ferro unidos pelas suas bases. Para sua construção temos placas circulares de $3m$ de raio. Determine as dimensões da boia para que seu volume seja máximo.
Solução.

O volume da boia ésta dado por $V = 2(\dfrac{1}{3})\pi x^2 y$. Do triângulo mostrado na Figura (6.23) temos $x^2 = 9 - y^2$, assim

$$V = 2(\frac{1}{3})\pi x^2 y = (\frac{2}{3})\pi(9 - y^2)y \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dy} = \frac{2\pi}{3}(9 - 3y^2)$$

quando $= 0$ segue que $y = \sqrt{3}$ de onde $r = \sqrt{6}$

A derivada segunda

$$\frac{d^2V}{dy^2} = \frac{2\pi}{3}(-6y) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2V}{dy^2}(\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}(-6\sqrt{3}) < 0$$

Portanto, o volume da boia será máximo quando o raio da base dos cones seja $r = \sqrt{6}$ e sua altura $y = \sqrt{3}$

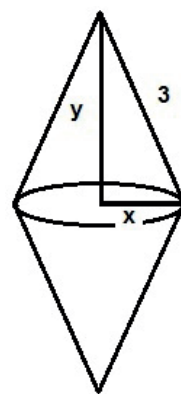



Figura 6.23:

Exercícios 6-4

1. Uma pessoa atira verticalmente para o céu uma bola do topo de um edifício. Depois de 2 segundos, a bola passa por ele, chegando ao solo 2 segundos depois.

   1. Qual era a velocidade inicial da bola ?

   2. Com que velocidade a bola passou pela pessoa, quando caía em direção ao solo ?

   3. Com que velocidade a bola chegará ao solo ?

   4. Qual é a altura do edifício ?

2. As equações do movimento de um projetil estão dadas pelas equações $x = t(v_0 \cos\alpha)$ e $y = t(v_0 \text{sen}\alpha) - 16t^2$, onde v_0 é a velocidade inicial, α é o ângulo de elevação do canhão, t é o tempo em segundos, x e y são as coordenadas do projetil. Determine a altura máxima que alcança o projetil e verifique que o maior alcance se obtêm quando $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

3. A lei de Boyle para a expansão de um gás é $PV = C$, onde P é o número de quilos por unidade quadrada de pressão, V é o número de unidades cúbicas no volume do gás e C é uma constante . Ache a taxa de variação instantânea de V em relação a P quando $P = 4$ e $V = 8$.

4. Esta sendo drenado água de uma piscina de volume V, o volume de água após t minutos do inicio da drenagem é $V = 250(1.600 - 80t + t^2)$. Achar: **(a)** A taxa média segundo a qual a água deixa a piscina durante os 5 primeiros minutos. **(b)** A velocidade a qual a água está fluindo da piscina 5 minutos após o começo da drenagem.

5. Suponha que um cilindro circular reto tenha uma altura constante de $10\,cm$. Se $V\,cm^3$ foi o volume do cilindro e r o raio de sua base, ache a taxa de variação média de V em relação a r quando r varia de: **(a)** $5,00$ a $5,40$; **(b)** $5,00$ a $5,10$; **(c)** $5,00$ a $5,01$; **(d)** ache a taxa de variação instantânea de V em relação a r quando r é $5,00$. Sugestão: A fórmula para encontrar o volume de um cilindro circular reto é $V = \pi r^2 h$, onde $h\,cm$ é altura do cilindro.

6. Um tronco de árvore mede $20\,m$, tem a forma de um cone truncado. Os diâmetros de suas bases medem $2\,m$ e $1\,m$, respectivamente. Deve-se cortar uma viga de seção transversal quadrada cujo eixo coincida com a do tronco e cujo volume seja o maior possível. Que dimensões deve ter a viga?

7. Quando duas resistências elétricas R_1 e R_2 estão unidas em paralelo, a resistência total R está dada por $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$. Se R_1 e R_2 aumentam a razão de $0.01 ohms/sg$ e $0.02\, ohms/sg$, respectivamente, Qual é a taxa de variação de R no instante em que $R_1 = 30\, ohms$ e $R_2 = 90\, ohms$?

8. Um foguete é lançado verticalmente e sua trajetória tem equação horária $s = 160t - 5t^2$, o sentido positivo para o céu. Determine: **a)** A velocidade do foguete $2\, s$ depois do lançamento. **b)** O tempo que leva o foguete para alcançar sua altura máxima.

9. Uma pedra é lançada a uma lagoa e produz uma série de ondulações concêntricas. Se o raio r da onda exterior cresce uniformemente a razão de $1.8\, m/s$, determine a taxa com a que a água perturbada está crescendo **a)** Quando $r = 3\, m$. **b)** Quando $r = 6\, m$.

10. Uma pedra se deixa cair (com velocidade inicial zero) do topo de um edifício de 144 metros de altura. **a)** Em que momento a pedra chegará ao solo ? **b)** Qual será a velocidade ao chegar ao solo ?. Sugestão: Para um objeto que se atira ou cai verticalmente, a altura que recorre depois de t segundos é: $A(t) = -16t^2 + V_0 + A_0$, onde V_0 é a velocidade inicial do objeto e A_0 é a altura inicial.

11. Suponhamos que um cilindro circular reto e fechado tenha uma área de $100\, cm^2$. Que valores devem ter o raio e sua altura para que seu volume seja máximo ?

12. Mostre que o cilindro reto de maior volume que pode ser inscrito em um cone, é $\dfrac{4}{9}$ do volume do cone.

13. Um cone circular reto tem um volume de $120\, cm^3$ Quais são as dimensões que deve ter este cone para que sua área lateral seja mínima?

14. Num triângulo isósceles ABC o lado desigual $\overline{AC}$ mede $2a$ e a altura correspondente a esse lado mede h. Determine um ponto P sobre a altura mencionada para que a soma das distâncias de P até os três vértices sea mínima.

15. Temos uma folha de papelão medindo $80cm$ por $50cm$. Cortando convenientemente em cada vértice num quadrado de lado x queremos construir uma caixa. Calcule x para que a referida caixa tenha um volume máximo.

16. Temos um arame de $1m$ de comprimento e desejamos dividi-lo em duas partes para formar com uma delas um círculo e com a outra um quadrado. Determine o comprimento que tem de cada uma das peças de modo que a soma das áreas do círculo e quadrado seja mínima.

Miscelânea 6-1

1. Estudemos a seguinte função: $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \text{sen}\dfrac{1}{x}, & \text{se}, \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{se}, \quad x = 0 \end{cases}$.

   Pelo **T.V.M** no intervalo $[0, x]$ temos: $f(x) - f(0) = x \cdot f'(c)$ quando $(0 < c < x)$. Isto é: $x^2 \text{sen}\dfrac{1}{x} = x(2c \cdot \text{sen}\dfrac{1}{c} - \cos\dfrac{1}{c})$, de onde $\cos\dfrac{1}{c} = 2c\text{sen}\dfrac{1}{c} - x \cdot \text{sen}\dfrac{1}{x}$.

   Quando x tende para zero, c também tende para zero; deste modo concluímos que: $\lim\limits_{c \to 0} \cos\dfrac{1}{c} = 0$. Explicar este resultado paradoxal.

2. Para uma constante $a > 0$, determine a diferença entre o valor máximo e mínimo relativo da função $g(x) = (a - \dfrac{1}{a} - x)(4 - 3x^2)$.

3. Sejam f e g funções diferenciáveis em $(a,\ b)$ tais que $f'(x) > g'(x) \quad \forall\, x \in (a,\ b)$. Se existe $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c) = g(c)$, mostre que $f(x) < g(x) \quad \forall\, x \in (a,\ c)$ e $g(x) < f(x) \quad \forall\, x \in (c,\ b)$.

4. Seja f derivável em $\mathbb{R}$ e $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $\quad x \neq 0$. Se c é um ponto de máximo local de g, mostre que:

   1. $c \cdot f'(c) - f(c) = 0$.

   2. A reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c,\ f(c))$ passa pela origem.

5. Determine os intervalos de crescimento ou decrescimento das seguintes funções:

   1. $y = 2 - 3x + x^3$ **2**. $y = x.e^{-x}$ **3**. $y = \sqrt{(x^2 - 1)^3}$

   4. $y = (2 - x)(x + 1)^2$ **5**. $y = x^2(1 - x\sqrt{x})$ **6**. $y = \text{Ln}(x^2 + 1)$

   7. $y = \dfrac{x}{\text{Ln}x}$ **8**. $y = (2x - 1)\sqrt[3]{(x - 3)^2}$ **9**. $y = x - 2\text{sen}^2 x$

   10. $y = e^{1,5\text{sen}x}$

6. O valor de um diamante é proporcional ao quadrado do seu peso. Divide um diamante de 2 gramas em duas partes de tal modo que a soma dos valores dos diamantes obtidos seja mínima.

7. Determine o cilindro de superfície total S, tal que seu volume seja máximo.

8. Para os seguintes exercícios, traçar o gráfico da curva correspondente indicando suas assíntotas.

1. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + x} - x, & \text{se,} \quad \mid x \mid \geq 9 \\ \dfrac{x^2 - 81}{x^2 - 9x}, & \text{se,} \quad \mid x \mid < 9 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}, & \text{se,} \quad \mid x \mid > 2 \\ \dfrac{3x}{2x + 1} + 6x, & \text{se,} \quad \mid x \mid \leq 2 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \sqrt[5]{\dfrac{x^8 + 2x + 1}{x^3 + 8}} & \text{se,} \quad x \leq -1 \\ \left[\left| -\dfrac{x + 1}{x + 3} \right|\right] & \text{se,} \quad -1 < x \leq 1 \\ \sqrt[3]{6x^2 - x^3} & \text{se,} \quad x > 1 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{x + 3}{x - 3}} & \text{se,} \quad x \leq -3 \\ \dfrac{3 \mid x + 3 \mid}{x + 1} & \text{se,} \quad -3 < x \leq 2 \\ \left[\left| 5 + \dfrac{2}{x} \right|\right] & \text{se,} \quad x > 2 \end{cases}$

9. Uma escada com $6m$ de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada começa a se deslizar horizontalmente, à razão de $0,6m/s$, com que velocidade o topo da escada desce a parede, quando está a $4m$ do solo?

10. Um homem de $1,80m$, caminhando à velocidade de $1,5m/s$, afasta-se de uma lâmpada situada a $5m$ acima do chão. Calcule a velocidade com que se move a sombra do homem e a velocidade com que se move a extremidade dela.

11. O gás de um balão esférico escapa à razão de $2dm^3/min$. Encontre a razão com que diminui a superfície do balão quando o raio é de $12dm$.

12. Um balão esférico está sendo inflado e seu raio é R no fim de t segundos. Encontre o raio no instante em que as taxas de variação da superfície e do raio são numéricamente iguais.

13. Mostre que a subtangente correspondente a qualquer ponto da parábola $y = ax^2$ é igual à metade da abscissa do ponto de tangencia.

14. Calcule as dimensões do trapézio regular de perímetro máximo que pode-se inscrever em uma semicircunferência de raio r se uma base do trapézio ocupa todo o diâmetro de la semicircunferência.

15. Um comerciante produz certo produto ao custo unitário de $R\$5,00$ e calcula que, se vendê-los a x reais a unidade, os clientes comprarão $(20 - x)$ unidades por dia. A que preço o fabricante deve vender seu produto para que seja máximo o lucro obtido ?

16. O número α é chamado "raiz dupla"da função polinômica f, se $f(x) = (x-\alpha)^2 g(x)$ para alguma função polinômica $g(x)$

   1. Mostre que α é raiz dupla de f se, e somente se também é raiz de f'.

   2. Em quais condições a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ tem raiz dupla?

17. O número de bactérias de certo cultivo num instante t é dado pela fórmula $N = 1000(25 + te^{t/20})$ para $0 \leq t \leq 100$.

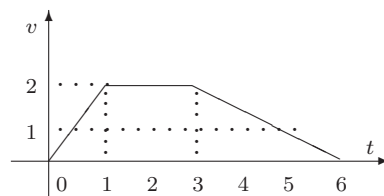
   1. Em que instante desse intervalo, $0 \leq t \leq 100$, existe um número máximo e um número mínimo de bactérias?

   2. Em que instante é mais lento o crescimento ou decrescimento do número de bactérias?

18. A velocidade de um móvil que parte da origem está dada em m/s e pelo gráfico:

   1. Calcular a função "espaço percorrido".

   2. Graficar a função espaço percorrido-tempo.

   3. Prove que a área sob a curva que da a velocidade coincide com o espaço total percorrido.

19. Determinar máximos e mínimos da função $f(x) = 2\text{sen}x + \cos 2x$.

20. Seja d o comprimento da diagonal de um retângulo de lados x e y respectivamente. Se x aumenta com uma rapidez de $0,5m/s$ e y diminui com uma rapidez de $0,25m/s$.

   1. Qual a razão em que esta mudando o comprimento da diagonal quando $x = 3m$ e $y = 4m$.

   2. A diagonal está aumentando ou diminuído nesse instante.

21. Um recipiente cilíndrico de capacidade 500 centímetros cúbicos, tem um raio de $2cm$ e esta cheio de água. Qual o erro que devemos aceitar ao medir sua altura h da água do recipiente para assegurar que teremos meio litro de água com um erro de menos 1%?

22. Num triângulo isósceles ABC o lado desigual $\overline{AC}$ mede $2a$ e a altura correspondente a esse lado mede h. Determine um ponto P sobre a altura mencionada para que a soma das distâncias de P até os três vértices sea mínima.

23. Um raio de luz (fóton) parte de um ponto A para um ponto B sobre um espelho plano, sendo refletido quando passa pelo ponto P. Estabelecer condições para que o caminho $\overline{APB}$ seja o mais curto possível.

24. Qual dos triângulos retângulos de perímetro dado $2p$, tem maior área ?

25. O custo variável da fabricação de um componente elétrico é $R\$8,05$ por unidade, e o custo fixo $R\$500,00$. Escreva o custo C como função de x, o número de unidades produzidas. Mostre que a derivada dessa função custo é constante e igual ao custo variável.

26. De todos os triângulos isósceles de $12m$ de perímetro, quais deles tem área máxima?

27. Pretende-se fabricar uma lata cilíndrica de metal com tampa que contenha um litro de capacidade para conservar manteiga. Quais serão as dimensões para que se utilize a menor quantidade de metal?

28. Um setor circular tem perímetro de $10m$. Determine o raio e amplitude do setor de maior área com esse perímetro.

29. Um triângulo isósceles de perímetro $30cm$, gira entorno de sua altura engendrando um cone. Qual o valor a dar a base para que o volume seja máximo?

30. Decompor o número 44 em dois somando de modo que a sexta parte do quadrado do primeiro mais a quinta parte do quadrado do segundo seja mínima?

31. Uma folha de papel deve ter de $18cm^2$ de texto impresso, as margens superior e inferior de $2cm$ de altura e as margens laterais de $1cm$ largura. Obter razoavelmente as dimensões que minimizam a superfície do papel.

32. O valor de um diamante é proporcional ao quadrado do seu peso. Divide um diamante de 2 gramas em duas partes de tal modo que a soma dos valores dos diamantes obtidos seja mínima.

Referências

[1] Abellanas P. & Perez Beato M.- **Curso de Matemáticas em Forma de Problemas.**- Sociedad Anónima Española de Traductores y Autores. 1960.

[2] Álvaro Pinzón.- **Cálculo I - Diferencial** - Colección Harper. Editor Torrelara España 1973.

[3] Berman G. N.- **Problemas y Ejercícios de Análisis Matemático**- Editorial MIR Moscoú. 1977.

[4] Deminovich B.- **Problemas y Ejercícios de Análisis Matemático.**- Editorial MIR Moscoú. 1971.

[5] Lang Serge.- **Cálculo I.**- Fondo Eduativo Interamericano S. A. 1973.

[6] Leithold Louis.- **Matemática Aplicada Á Economia e Administração.**- Editora HARBRA 1988.

[7] O'Connor J. J. & Robertson E. F.- **História do Cálculo.** http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk.

[8] Kudriávtsev L. D. at ell.- **Problemas de Análisis Matemático**.-Vol I - Editorial MIR Moscoú. 1984.

[9] Rivaud J.- **Exercices d'analyse**- Livrarie vuibert Paris. Tomo I 1971.

[10] Stewart. James,- **Cálculo de una Variable: Trascendentes tempranas.**- Sexta Edição - CENGAGE Learning. 1989.

[11] Spivak Michael.- **Calculus: Cálculo Infinitesimal.** - Editorial Reverte. 1983.

[12] Swokowski. Earl W.- **Cálculo con Geometria Analítica.**- Segunda Edição - Grupo Editorial Iberoamérica. 2008.

[13] Tibirica D. Altamirano.- **Curso de Cálculo Infinitesimal.**- Tomo I, Publicação da Fundação Gorciex.Ouro Preto 1962.

Índice

CÁLCULO DIFERENCIAL EM $\mathbb{R}$

Christian Q. Pinedo

Christian Jose Quintana Pinedo *possui Bacharelato em Matemática Pura, pela universidade decana da América - Universidad Nacional Mayor de San Marcos - Lima/Peru (*1980*), mestrado (*1990*) e doutorado (*1997*) em Ciências Matemáticas, pela Universidade Federal do Rio de Janeiro. Como professor de matemática, desde* 1977*, atuou nas universidades:* **(1)** *Nacional Mayor de San Marcos,* **(2)** *Nacional de Ingenieria,* **(3)** *Técnica del Callao,* **(4)** *De Lima,* **(5)** *San Martin, em Lima - Peru. No Brasil, atuou nas universidades:* **(1)** *Unioeste (Cascavel),* **(2)** *Tecnológica Federal do Paraná (Pato Branco) e* **(3)** *Universidade Federal do Tocantins - UFT. É professor associado da Fundação Universidade Federal do Tocantins e Coordenador do Curso da Licenciatura em Matemática EAD/UAB/UFT. Desde* 2005 *pertence ao Banco de avaliadores do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - Inep. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Educação Permanente, atuando principalmente nos seguintes temas: educação matemática, matemática, história da matemática, equações diferenciais e educação. É membro do Conselho Editorial da IES Claretiano, em São Paulo, e da Universidade Federal do Tocantins - UFT (período* $2012 - 2014$*). Christian tem trabalhos publicados na área de equações diferenciais em derivadas parciais, história da matemática e outros; suas linhas de pesquisa são: História da Matemática, Filosofia da Matemática, Epistemologia da Matemática e Equações Diferenciais em Derivadas Parciais.*